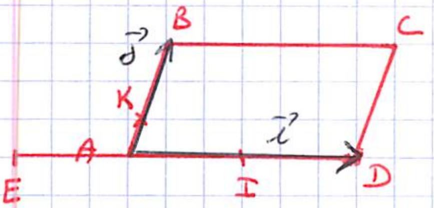
TD5 Exercice 4



Considérons le repère $(A, \underbrace{\overrightarrow{AD}}_{\vec{i}}, \underbrace{\overrightarrow{AB}}_{\vec{j}})$

- Dans ce repère : $A\,(0\,;0)$ car A est l'origine
  $D\,(1\,;0)$ car $\overrightarrow{AD} = 1\vec{i}$
  $B\,(0\,;1)$ car $\overrightarrow{AB} = 1\vec{j}$

- Comme I est le milieu de $[AD]$
  alors $x_I = \dfrac{x_A + x_D}{2} = \dfrac{1}{2}$ et $y_I = \dfrac{y_A + y_D}{2} = 0$

- Comme J est le symétrique de I par rapport à A
  alors $\overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AI} = -\dfrac{1}{2}\vec{i}$
  donc E a pour coordonnées $\left(-\dfrac{1}{2}\,;0\right)$

- Soit $(x;y)$ les coordonnées de K alors $\overrightarrow{AK}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
  Comme $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ alors $\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \times \frac{1}{3} \\ 1 \times \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

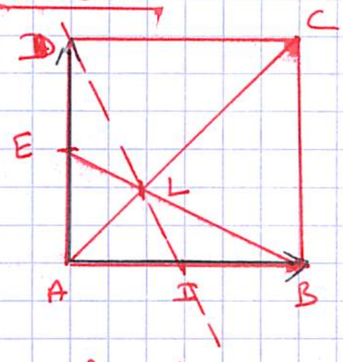
  or $\left\{\begin{array}{l} \text{deux vecteurs égaux ont les mêmes coordonnées} \\ \overrightarrow{AK} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} \end{array}\right.$

  donc $\left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$ donc $K\left(0\,;\dfrac{1}{3}\right)$

- On a donc : $\overrightarrow{EK}\begin{pmatrix} 0 - (-\frac{1}{2}) \\ 1/3 - 0 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{EK}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

Comme $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \vec{i} + \vec{j}$ alors C a pour coordonnées $(1;1)$
donc $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix} 1 - (-1/2) \\ 1 - 0 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$
Comme $\begin{vmatrix} 1/2 & 3/2 \\ 1/3 & 1 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} = 0$ alors $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{EK}$ sont colinéaires
donc E, C, K sont alignés

Exercice 5



On utilise le repère orthonormé $(A, \underbrace{\vec{AB}}_{\vec{i}}, \underbrace{\vec{AD}}_{\vec{j}})$

Dans ce repère, on montre facilement que :

$A(0;0)$

$B(1;0)$

$D(0;1)$

$I\left(\frac{1}{2};0\right)$

$E\left(0;\frac{1}{2}\right)$ et $C(1;1)$

Pour déterminer les coordonnées de L, on cherche d'abord des équations des droites (AC) et (EB).

(AC) a pour vecteur directeur le vecteur $\vec{AC}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et

(AC) passe par $A(0;0)$

donc .... une équation de (AC) est : $x - y = 0$

(EB) a pour vecteur directeur le vecteur $\vec{EB}\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et

passe par $B(1;0)$

donc .... une équation de (EB) est : $-\frac{1}{2}x - y + \frac{1}{2} = 0$ $\swarrow \times(-2)$

soit aussi : $x + 2y - 1 = 0$

$L(x ; y) \in (BE) \cap (AC)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$ (soit aussi $x = y$) (soit aussi $y = \frac{-x+1}{2}$)

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$ (Système à résoudre, voir si nécessaire pour cela vos cours de 3e et seconde)

$\Leftrightarrow$ ...

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$

donc $L\left(\frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right)$

On en déduit que $\overrightarrow{DL}\begin{pmatrix} 0 - \frac{1}{3} \\ 1 - \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{DL}\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

et $\overrightarrow{DI}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} - 0 \\ 0 - 1 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{DI}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$

Comme $\begin{vmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & -1 \end{vmatrix} = \left(\left(-\frac{1}{3}\right) \times (-1)\right) - \left(\frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{3}\right)$

$= +\frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$

alors $\overrightarrow{DI}$ et $\overrightarrow{DL}$ sont colinéaires

donc D, I, L sont alignés.

CQFD