COURS 04/04	**SAVOIR-FAIRE**	11/11/2015

Exercice

1) Déterminer une fonction avec u croissante sur un intervalle I et v décroissante sur I telle que :
   a) u + v soit croissante sur I

   b) u + v soit décroissante sur I

Conclusion : ……………………………………………………………………………………………………….

2) La proposition « le produit uv de deux fonctions u et v croissantes sur un intervalle I est une fonction croissante sur I » est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

SF1 Repérer si une fonction est du type u+k, ku, $\sqrt{u}$, $\frac{1}{u}$ …
SF2 Démontrer la monotonie d'une fonction sur un intervalle

1ère méthode : Démontrer que, si $a \leqslant b$, alors $f(a) \leqslant f(b)$ pour une croissance (ou $f(a) \geqslant f(b)$ pour une décroissance).

Sous-méthode 1 : on étudie le signe de $f(a) - f(b)$ si f ne peut s'écrire avec les fonctions de référence.

C'est la méthode la plus compliquée, utilisée pour démontrer les monotonies des fonctions de référence $x \mapsto ax + b$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \sqrt{x}$.

Sous-méthode 2 : on transforme $a \leqslant b$ successivement jusqu'à $f(a) \leqslant f(b)$ pour une croissance (ou $f(a) \geqslant f(b)$ pour une décroissance) en utilisant la monotonie des fonctions de référence.

Elle est plus simple mais elle ne fonctionne pas lorsqu'il faut ajouter des plus petits et des plus grands :
par exemple, si $a \leqslant b$ et $\frac{1}{a} \geqslant \frac{1}{b}$, on ne peut rien dire de $a + \frac{1}{a}$ par rapport à $b + \frac{1}{b}$ ...

Attention !

Pour transformer $a \leqslant b$ en $a^2 \leqslant b^2$, il faut préciser que a et b sont positifs et justifier « *car la fonction carré est croissante sur* $[\,0\,;+\infty\,[$ (on peut dire $\mathbb{R}+$)».

Pour transformer $a \leqslant b$ en $a^2 \geqslant b^2$, il faut préciser que a et b sont négatifs et justifier « *car la fonction carré est décroissante sur* $]-\infty\,;0\,]$ (on peut dire $\mathbb{R}-$)».

Pour transformer $a \leqslant b$ en $\frac{1}{a} \geqslant \frac{1}{b}$, il faut préciser que a et b sont strictement positifs (ou strictement négatifs) et justifier « *car la fonction inverse est décroissante sur* $]\,0\,;+\infty\,[$ (*ou sur* $]-\infty\,;0\,[$) ».

Pour transformer $a \leqslant b$ en $\sqrt{a} \leqslant \sqrt{b}$, il faut préciser que a et b sont positifs et justifier « *car la fonction racine carrée est croissante sur* $[\,0\,;+\infty\,[$ ».

2ème méthode : Poser les fonctions de référence utiles et écrire f en fonction de celles-ci.
Utiliser les opérations autorisées sur les fonctions monotones (impossible par exemple un produit de fonctions, ou avec le carré d'une fonction...).

Attention !

Ne pas oublier la positivité de u avant d'utiliser $\sqrt{u}$.

Ne pas oublier la non nullité de u avant d'utiliser $\frac{1}{u}$.

Pour les quatre premiers exercices, on peut utiliser les deux méthodes, mais pas pour les deux derniers...