Cours 05/02 : indicateurs probabilistes

Définitions 1

Soit Ω un univers de nombres réels $x_1, x_2 \ldots x_p$ sur lequel est définie une loi de probabilité.
Pour i = 1..p, on note p_i la probabilité de l'issue x_i.

On appelle **espérance** de la loi de probabilité le réel μ défini par $\mu = \sum_{i=1}^{i=p} p_i x_i$.

On appelle **variance** de la loi de probabilité le réel positif $V = \sum_{i=1}^{i=p} p_i(x_i - \mu)^2$ et **écart–type** de la loi de probabilité le réel positif $\sigma = \sqrt{V}$.

Propriétés 2

Par analogie avec le cours de statistiques, on démontre que : $V = \left(\sum_{i=1}^{i=p} p_i x_i^2 \right) - \mu^2$ (**théorème de Koenig**)

Exemple A :
On choisit au hasard une famille parmi les familles de trois enfants et on note le nombre de filles.
Des données statistiques ont permis de construire la loi de probabilité définie dans le tableau ci–dessous.

Nombres d'enfants x_i	0	1	2	3
Probabilité p_i associée	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Calculer l'espérance, la variance et l'écart–type de cette loi de probabilité. Interpréter les résultats.

(Réponses : 1,5 ; 0,75 et environ 0,87)

Définitions 3

L'espérance, la variance, l'écart-type d'une variable aléatoire X sont respectivement l'espérance, la variance, l'écart-type de sa loi de probabilité.
L'espérance, la variance et l'écart-type de X sont respectivement notés : **E(X), V(X) et σ(X).**

Exemple B

Un hôtel comporte 5 étages identiques et un rez–de–chaussée, desservis par un ascenseur.
Les seules possibilités d'arrêt de l'ascenseur sont les suivantes : arrêt à l'étage n (n entier de 1 à 5) ou arrêt au rez de chaussée.
La probabilité de l'événement "l'ascenseur est à l'arrêt à l'étage n" est égale à 0,1.
Lorsque l'ascenseur se déplace, il met 2 s pour démarrer, 4s d'un niveau au niveau suivant et 2s pour s'arrêter.
Quelle est la durée d'attente moyenne pour un client appelant l'ascenseur du rez-de-chaussée ? (on calculera aussi l'écart-type associé à cette donnée)

On considère la …………………………………………………………………………… ……………. égale au ……………………………………………………………………..

Sa ………………………………………………………………………………………. est donnée par le tableau suivant :

Son espérance est égale à ……………., sa variance est ……………. et son écart–type est …………….

Cours 05/03 : Transformation affine d'une variable aléatoire

Théorème *Soit a et b deux réels et X une variable aléatoire alors :*

$\boxed{E(aX) = a\,E(X)}$ $\boxed{E(X+b) = E(X) + b}$ $\boxed{E(aX+b) = a\,E(X) + b}$ $\boxed{V(aX) = a^2V(X)}$ $\boxed{V(aX+b) = a^2V(X)}$ $\boxed{\sigma(aX+b) = |a|\,\sigma(X)}$

Exemple A :

Soit X une variable aléatoire telle que $E(X) = 2$ et $V(X) = 5$.

1) Calculer $E(3X-1)$ et $V(3X-1)$.

2) Calculer $E(-2X+1)$ et $V(-2X+1)$.

Application B :

53 Paul effectue en voiture le même trajet tous les jours. Sur sa route, il y a trois feux.
Une étude statistique, portant sur le nombre X de feux rouges a permis d'établir les résultats suivants :

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,1	0,3	0,4	0,2

1) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

2) Le trajet sans aucun arrêt dure 15 min et chaque feu rouge rallonge la durée du trajet de 2 min.
Soit T la variable aléatoire qui donne la durée du trajet de Paul.

a) Quelle relation lie X et T ?

b) En déduire $E(T)$ et $V(T)$.

Application C : des barèmes des questionnaires

56 Un exercice est composé de cinq questions pour lesquelles, on doit répondre obligatoirement par « vrai » ou « faux ». Une réponse juste rapporte 2 points, une réponse fausse retire 1 point. En cas de score final négatif, la note est ramenée à zéro.

On note X la variable aléatoire qui donne la note d'un candidat ayant répondu au hasard.

1) Déterminer la loi de probabilité de X.

2) Quelle note peut espérer le candidat ?

3) On décide de ramener la note de chaque candidat sur 20. Quelle note peut espérer cette fois le candidat ?

Application D :

Le tableau ci–dessous indique le nombre de clients se présentant par heure dans un salon de coiffure.

Nombre de clientes	0	1	2	3	4	5
Probabilité	0,15	0,20	0,25	0,20	0,15	0,05

Si le propriétaire du salon reçoit une cliente, il gagne 100 $. Mais, s'il doit la renvoyer, celle–ci mécontente, lui fait une telle contre–publicité dans tout le quartier, que le coiffeur estime qu'une personne renvoyée lui coûte 200 $ de perte de clientèle.

1°) On suppose que le salon peut recevoir au maximum trois clientes simultanément.
X est la variable aléatoire indiquant le bénéfice du propriétaire du salon en $ et par heure.
Déterminer la loi de probabilité de X.

2°) Reprendre la première question en supposant que le salon peut recevoir quatre clientes simultanément.
On appellera Y la variable aléatoire indiquant le bénéfice du propriétaire du salon en $ et par heure s'il peut recevoir 4 clients simultanément.

Pour servir quatre clientes simultanément au lieu de trois, le propriétaire du salon doit embaucher une nouvelle employée et cela lui coûterait 80 $ de l'heure.

3°) Soit la variable aléatoire Z = Y – 80. Interpréter Z.
4°) Calculer E(Z) et interpréter le résultat.
5°) Quelle subvention de l'état pourrait-il demander pour prendre une nouvelle employée ?