$1^{\text{ère}}$ S	Devoir n° 9M	Corrigé exercice 2

Dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ on considère les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ et $\mathscr{C}_4$ d'équations respectives :

$y = -x^2 +3x+6$; $y = x^2+7x+8$; $y = x^3-x^2+4$; $y = -x^4+2x^2+x$

1°) Montrer qu'il existe un point A commun aux trois courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$.

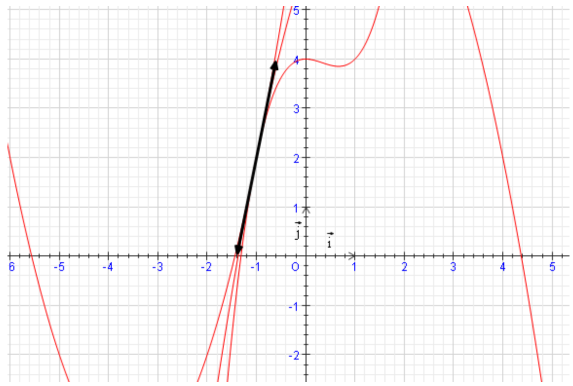
Ces courbes admettent-elles la même tangente en A ?

2°) Démontrer que la tangente à $\mathscr{C}_4$ au point d'abscisse -1 est aussi tangente à $\mathscr{C}_4$ en un autre point à préciser.

1°) $\mathscr{C}_1$ a pour équation $y = -x^2+3x +6$, $\mathscr{C}_2$ a pour équation $y= x^2 +7x +8$

Pour les points d'intersection de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$, on résout l'équation (E) : $-x^2+3x+6 = x^2 +7x +8$

(E)$\Leftrightarrow 2x^2 +4x +2 = 0 \Leftrightarrow x^2 +2x +1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$



Pour $x = -1$: $-x^2+3x +6 = x^2 +7x +8 = 2$ donc A(-1;2) est le seul point commun à $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

$x_A^3 - x_A^2 + 4 = -1 -1+4 = 2 = y_A$

donc A(-1;2) appartient aussi à $\mathscr{C}_3$, qui est donc commun aux trois courbes.

Une droite (non parallèle à l'axe des ordonnées) est parfaitement déterminée par un point et son coefficient directeur. Pour montrer que les trois courbes ont même tangente en A, il suffit de prouver que leurs tangentes en A ont le même coefficient directeur.

Pour tous réel x, posons $f(x) = -x^2+3x +6$, $g(x) = x^2 +7x +8$ et $h(x) = x^3 - x^2 + 4$.

Ces trois fonctions sont respectivement représentées par $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$.

Ces trois fonctions sont des fonctions polynômes donc elles sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $f'(x) = -2x + 3$, $g'(x) = 2x +7$ et $h'(x) = 3x^2 -2x$

donc $f'(-1) = 5 = g'(-1) = h'(-1)$

donc les tangentes en A ont bien le même coefficient directeur donc $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ admettent en A donc la même tangente.

2°) Pour tout réel x, posons $f(x) = -x^4 +2x^2 +x$. f est représentée par $\mathscr{C}_4$.

f est une fonction polynôme donc elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :

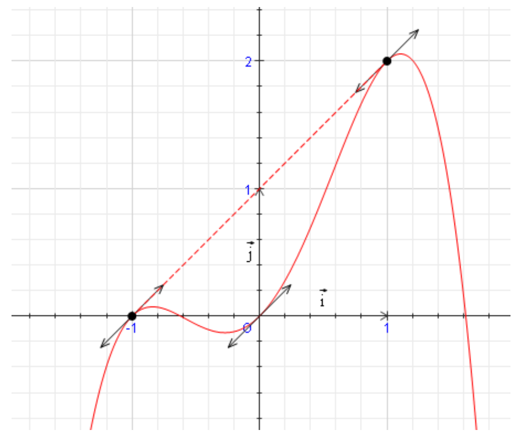
$$f'(x) = -4x^3 +2\times 2x +1 = -4x^3 +4x +1.$$

d'où $f(1) =- 1 + 2 -1 = 0$ et $f'(-1) = -4\times (-1) +4\times(-1) + 1 = 1$.

Une équation de la tangente T au point d'abscisse -1 est donc : $y = f'(-1) (x - (-1)) + f(1)$ soit $y = x+1$.

On commence par résoudre l'équation : $f'(x) = f'(-1) = 1 \Leftrightarrow -4x^3 + 4x + 1 = 1 \Leftrightarrow -x^3 + x = 0 \Leftrightarrow x(1-x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \text{ou} \\ x=1 \\ \text{ou} \\ x=-1 \end{cases}$

Ainsi, les coefficients directeurs des tangentes aux points M et N d'abscisses respectives 0 et 1 sont les mêmes que celui en -1. Ces tangentes sont donc parallèles entre elles.



f(0) = 0 donc M a pour coordonnées (0;0)
mais comme $x_M + 1 \neq y_M$ alors T n'est pas une tangente à $\mathscr{C}_4$ en M.

f(1) = 2 donc N a pour coordonnées (1;2)
mais comme $x_N + 1 = y_N$ alors T est une tangente à $\mathscr{C}_4$ en N.

N(1;2) est donc le point cherché