TD 12 : un corrigé

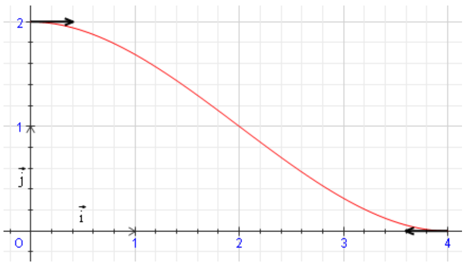
Notons f une fonction dérivable sur [0;4] représentée par une courbe solution.

Les contraintes posées sur la construction du toboggan se traduisent par : $\begin{cases} f(0) = 2 \\ f(4)=0 \\ f'(0)=0 \\ f'(4)=0 \end{cases}$.

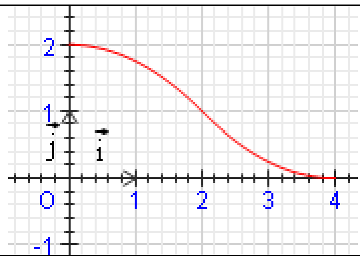
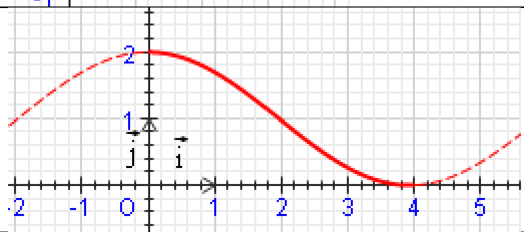
On cherche f dans les restrictions de familles étudiées en cours (polynômes, rationnelles, circulaires).
On peut commencer par chercher f dans la famille des restrictions des fonctions polynômes à l'intervalle [0;4].
Comme f' doit s'annuler au moins deux fois, f n'est pas la restriction d'une fonction polynôme de degré au plus 2.
On commence donc à partir du degré 3 en cherchant s'il existe des coefficients a, b, c et d (avec $a \neq 0$) tels que pour tous réels x :
$f(x) = a x^3 + bx^2 + cx + d$, ce qui conduit à $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Les contraintes se traduisent alors par : $\begin{cases} d=2 \\ 64a+16b+4c+d=0 \\ c=0 \\ 48a+8b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=2 \\ c=0 \\ 32a+8b=-1 \\ 6a+ b= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=2 \\ c=0 \\ 32a+8b=-1 \\ b=-6a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=2 \\ c=0 \\ -16a=-1 \\ b=-6a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1/16 \\ b=-3/8 \\ c=0 \\ d=2 \end{cases}$.

Ainsi, on peut proposer la courbe d'équation $\boxed{y = \frac{1}{16}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + 2}$



<u>Autres solutions proposées</u> :

$\begin{cases} f(x)= -\frac{1}{4}x^2 + 2 \text{ si } x \in [0,2] \\ f(x)=\frac{1}{4}x^2 - 2x + 4 \text{ si } x \in [0,4] \end{cases}$ Avec deux restrictions de fonctions polynômes du second degré, on récupère deux nombres dérivés nuls.	
$f(x)= \cos\left(\frac{4}{5}x\right)+1$	
$f(x) = \frac{-2,25x^2}{x^2+2} + 2$