$1^{\text{ère}}$ S	**Devoir 13 M**	**Corrigé de l'exercice 1**

1°)ab)Comme les aiguilles tournent de manière continue, la grande aiguille parcourt un tour complet en 60 min donc 60 fois moins en une min donc : $(\vec{j},\overrightarrow{OG}) = \frac{2\pi}{60} = \frac{\pi}{30}$ rad ou $\boxed{6°}$ en 1 min puis $\boxed{(\vec{j},\overrightarrow{OG}) = \frac{\pi t}{30} \text{ rad}}$ ou $\boxed{6t\,°}$ en t min.

2°) Pour la petite aiguille qui parcourt un tour complet en 12 heures soit 720 minutes, on obtient de même:

$(\vec{j},\overrightarrow{OP}) = \frac{2\pi}{720} = \boxed{\frac{\pi}{360}}$ rad ou $\boxed{0{,}5\,°}$ pour 1 min puis $\boxed{(\vec{j},\overrightarrow{OP}) = \frac{\pi t}{360}}$ ou $\boxed{0{,}5t}$ pour t min

3°) $(\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OG}) = (\overrightarrow{OP},\vec{j}) + (\vec{\imath},\overrightarrow{OG}) = -(j,\overrightarrow{OP}) + (\vec{j},\overrightarrow{OG}) = (\vec{j},\overrightarrow{OG}) - (\vec{j},\overrightarrow{OP}) = \frac{\pi t}{30} - \frac{\pi t}{360} = \frac{12\pi t}{360} - \frac{\pi t}{360} = \frac{11\pi t}{360}\ [2\pi]$

4°) Les aiguilles sont superposées lorsque $(\overrightarrow{OG},\overrightarrow{OP}) = 0\ [2\pi]$

Or : $(\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OG}) = \frac{11\pi t}{360}\ [2\pi]$

donc les aiguilles sont superposées pour les réels t et les naturels k (on raisonne pour les cas après un minuit donné) tels que:

$\frac{\pi t}{30} - \frac{\pi t}{360} = \frac{11\,\pi t}{360} = 0 + k \times 2\pi$ (en rad) ou $5{,}5\,t = 0 + k \times 360$ (en deg)

équivalent à : $t = \frac{720}{11} \times k$ avec $k \in \{1;2;3\ldots\}$ ou $t = \frac{360}{5{,}5} = \frac{720}{11} \times k$ où k $k \in \{1;2;3\ldots\}$

soit aux instants t tels que : $t = \frac{720}{11} \times k$ ou $k \in \{0;1;2;3\ldots\}$

k =0 correspond à minuit.

k = 1 correspond à la première superposition après minuit soit à l'instant $t = \frac{720}{11}$ min ≈ 65,45 min ≈ $\boxed{\text{1 h 5 min 27s.}}$

5°)

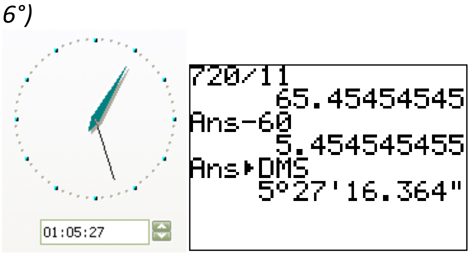
Soit k un entier naturel, puisque $\frac{720}{11} \times (k+1) - \frac{720}{11} \times k = \frac{720}{11}$, on passe d'un instant t de superposition à l'autre en ajoutant $\frac{720}{11}$ min.

Le phénomène de superposition se reproduit donc toutes les $\frac{720}{11}$ minutes (**soit environ toutes les 1 h 5 min 27s**).

Remarque : Pour k = 11, on a t = 720 min = 12 h

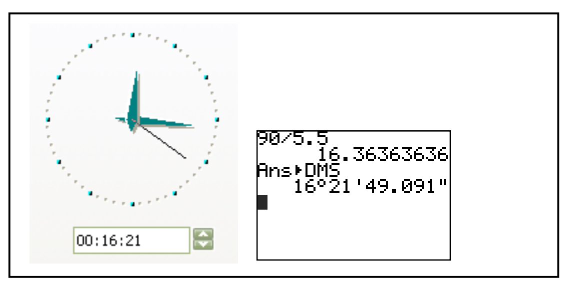
Les positions de superposition sont donc celles connues parmi les 11 positions connues entre minuit (k=0) jusqu'à la dernière avant midi (k =10) : le phénomène de superposition se reproduit donc périodiquement et les instants de superposition sont associées à exactement 11 positions sur la montre.

6°)



7°) De même, après minuit, les deux aiguilles sont perpendiculaires pour la première fois après minuit lorsque 5,5 t = 90 (en degrés)

équivalent à : $t = \frac{360}{22} = \frac{180}{11} = \frac{90}{5{,}5}$ min ≈ $\boxed{\textbf{16 min 21 sec}}$



<u>Remarque (vous pouvez chercher)</u> :

Les deux aiguilles sont perpendiculaires après minuit

pour les entiers naturels k tels que $5{,}5\,t = 90 + k \times 360$

ou les entiers naturels k' supérieurs à 1 tels que $5{,}5\,t = -90 + k' \times 360$

soit les entiers naturels k tels que pour $t = \frac{90}{5{,}5} + \frac{720}{11}k$

ou *les entiers naturels k' supérieurs à 1 tels que* $t = -\frac{90}{5{,}5} + \frac{720}{11}k'$.

Pour k =0, t ≈ 16 min. Pour k = 1, t ≈ 1h21min et ainsi de suite avec une période pour t égale à environ 1h 5 min.

Pour k' = 1, t ≈ 49 min. Pour k' = 2, t ≈ 1h 54 min et ainsi de suite avec une période pour t égale à environ 1h 5 min.