TD 14 : démontrer des égalités

Exercice 1

1°) Peut–on écrire : pour tout réels x et y, $\cos(x+y) = \cos x + \cos y$?
2°) Prouvez que pour tout réel x: $(\cos x - \sin x)^2 + (\cos x + \sin x)^2 + \sin^2 x - \cos^2 x = 3 - 2\cos^2 x$.

Exercice 2

En regroupant judicieusement les termes, montrer que :

1°) $\sin\frac{\pi}{8} - \sin\frac{3\pi}{8} + \sin\frac{5\pi}{8} - \sin\frac{7\pi}{8} = 0$

2°) Avec une calculatrice, conjecturer l'entier égal à $\cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{5\pi}{8} + \cos^2\frac{7\pi}{8}$ puis valider cette conjecture (pour les plus hardis).

(solutions page suivante)

Solutions

Exercice 1

1°) Non, voici un contre–exemple : cos (0+0) = cos 0 = 1 et cos 0 +cos 0 = 2.

2°) Pour tout réel x :

$(\cos x - \sin x)^2 + (\cos x + \sin x)^2 + \sin^2 x - \cos^2 x$

$= \cos^2 x + \sin^2 x - 2\cos x \sin x + \cos^2 x + \sin^2 x + 2\cos x \sin x + \sin^2 x - \cos^2 x$ (propriété de Pythagore)

$= \cos^2 x + 3\sin^2 x$

$= \cos^2 x + 3(1 - \cos^2 x)$ (propriété de Pythagore)

$= 3 - 2\cos^2 x$ CQFD

Exercice 2

1°) Pour tout réel x, sin (π –x) = sin x donc : $\sin\frac{5\pi}{8} = \sin\left(\pi - \frac{3\pi}{8}\right) = \sin\frac{3\pi}{8}$ et $\sin\frac{7\pi}{8} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) = \sin\frac{\pi}{8}$

donc : $\sin\frac{\pi}{8} - \sin\frac{3\pi}{8} + \sin\frac{5\pi}{8} - \sin\frac{7\pi}{8} = \sin\frac{\pi}{8} - \sin\frac{3\pi}{8} + \sin\frac{3\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{8} = 0$

CQFD

<u>Autre méthode</u> :

Pour tout réel x, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ donc : $\sin\frac{3\pi}{8} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \cos\frac{\pi}{8}$

Pour tout réel x, $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$ donc: $\sin\frac{5\pi}{8} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = \cos\frac{\pi}{8}$

Pour tout réel x, sin (π –x) = sin x donc : $\sin\frac{7\pi}{8} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) = \sin\frac{\pi}{8}$

donc : $\sin\frac{\pi}{8} - \sin\frac{3\pi}{8} + \sin\frac{5\pi}{8} - \sin\frac{7\pi}{8} = \sin\frac{\pi}{8} - \cos\frac{\pi}{8} + \cos\frac{\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{8} = 0$ CQFD

2°) L’entier à conjecturer est 2.

Validation :

Pour tout réel x, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ donc : $\cos\frac{3\pi}{8} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \sin\frac{\pi}{8}$

Pour tout réel x, $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$ donc: $\cos\frac{5\pi}{8} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = -\sin\frac{\pi}{8}$

Pour tout réel x, cos (π –x) = –cos x donc : $\cos\frac{7\pi}{8} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) = -\cos\frac{\pi}{8}$

donc : $\cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{5\pi}{8} + \cos^2\frac{7\pi}{8} = \cos^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{\pi}{8} + \left(-\sin\frac{\pi}{8}\right)^2 + \left(-\cos\frac{\pi}{8}\right)^2 = \cos^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{8}$

or pour tout réel x, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

donc : $\cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{5\pi}{8} + \cos^2\frac{7\pi}{8} = \cos^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{8} = 1 + 1 = 2$ CQFD