TP 16 : fonction n (polynôme)

Fonction

$f : x \mapsto x^3\ (x-3)$

Ensemble de définition
Intervalles de dérivation

f est une fonction polynôme donc n est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Expression de la dérivée

$\forall\ x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 3x^2(x-3)+x^3\times 1 = 3x^3 - 9x^2 + x^3 = \boxed{4x^3 - 9x^2}$

Argumentation :
Dérivée de fonctions de référence (cube, affines)
Dérivée d'un produit de fonction

Tableau des variations

$\forall\ x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = x^2\ (4x-9)$

- $4x-9=0 \Leftrightarrow x = \dfrac{9}{4}$

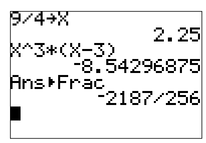
  4x -9 est une expression du type ax+ b avec a > 0 et ayant pour racine 9/4 : pour obtenir son signe, il suffit d'appliquer le cours avec ces données.
- $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

  x^2 est positive comme tout carré et nulle uniquement en 0.

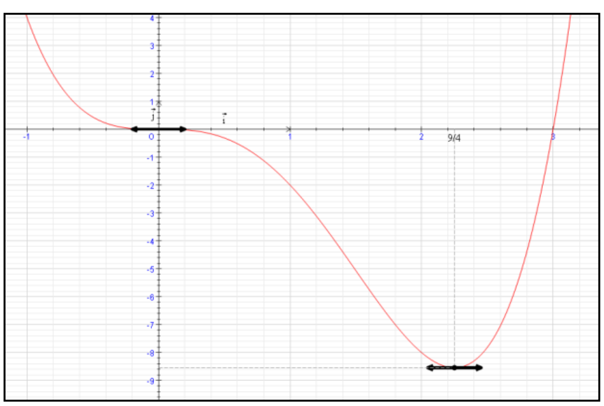
d'où par application du théorème sur les variations :

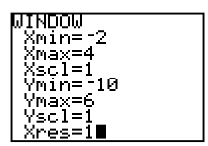
x	$-\infty$		0		$9/4$		$+\infty$
x^2		$+$	0	$+$		$+$	
$4x-9$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$			y_0	$\nearrow$	

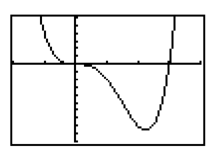
où $y_0 = f\left(\dfrac{9}{4}\right) = \dfrac{9^3}{4^3} \times \left(\dfrac{9}{4} - 3\right) = \dfrac{9^3}{4^3} \times -\dfrac{3}{4} = -\dfrac{2187}{256} \approx -8,5$



Représentation graphique



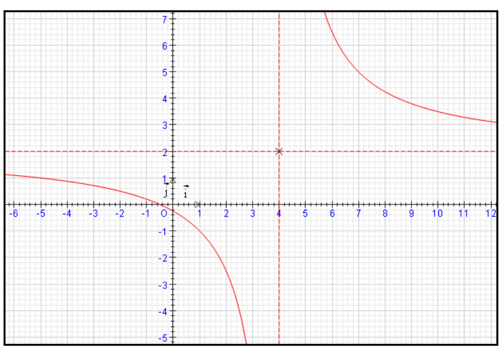


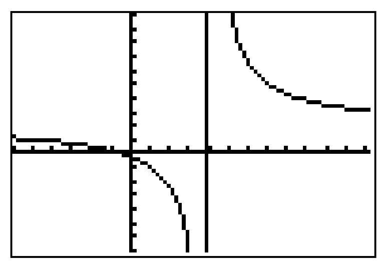


TP 16 : fonction k (homographique)

<table>
<tr><td>Fonction</td><td>$f\ : x \mapsto \dfrac{2x-1}{x-4}$</td></tr>
<tr><td>Ensemble de définition
Intervalles de dérivation</td><td>x- 4 = 0 ⇔ x = 4
4 est le seul pôle de la fonction rationnelle f (f est aussi une fonction homographique)
donc f est définie sur $\mathscr{D}$ =]-∞;4[∪]4; +∞[et dérivable sur]-∞;4[et sur]4;+∞[.</td></tr>
<tr><td>Expression de la dérivée</td><td>$\forall x \in \mathscr{D} : f'(x) = \dfrac{2(x-4)-[(2x-1)\times 1]}{(x-4)^2} = \dfrac{2x-4-2x+1}{(x-4)^2} = \dfrac{-3}{(x-4)^2}$
<u>Argumentation :</u>
Dérivée de fonctions de référence (affines), dérivée d'un quotient de fonctions.

Pour les fonctions homographiques
Si $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ alors $f'(x) = \dfrac{a\times(cx+d)-(ax+b)\times c}{(cx+d)^2} = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2} = \dfrac{\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$</td></tr>
<tr><td>Tableau des variations</td><td>$\forall x \in \mathscr{D}$: f'(x) <0 comme quotient de deux nombres non nuls de signes contraires.

Par application du théorème sur les variations, on en déduit :
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>4</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>f'(x)</td><td>–</td><td>||</td><td>–</td></tr>
<tr><td>f(x)</td><td>↘</td><td>||</td><td>↘</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>Représentation graphique</td><td>

</td></tr>
</table>

TP 16 : fonction f (polynôme)

<table>
<tr><td>Fonction</td><td>$f : x \mapsto - 2x^2 + 3x - 1$</td></tr>
<tr><td>Ensemble de définition
Intervalles de dérivation</td><td>f est une fonction polynôme donc f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.</td></tr>
<tr><td>Expression de la dérivée</td><td>$\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = \frac{3x^2}{3} - 2\times2x + 3 = x^2 - 4x + 3$

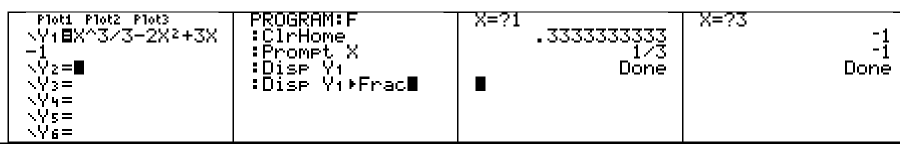
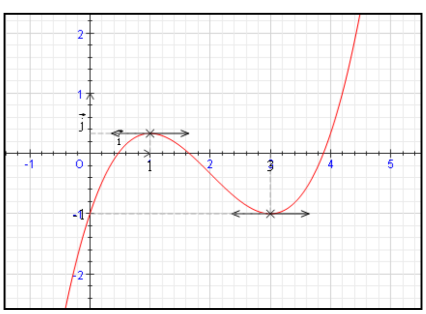
<u>Argumentation</u> :
Dérivée de fonctions de référence (affines, cube, carré), dérivée d'une somme de fonctions, dérivée du produit d'une fonction par une constante (pour $\frac{x^3}{3} = \frac{1}{3}x^3$ et pour $2x^2$).</td></tr>
<tr><td>Tableau des variations</td><td><u>Pour $x^2 - 4x + 3$</u> : $\Delta = b^2 - 4ac$ avec $\begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 3 \end{cases}$ donc $\Delta = 16 - 12 = 4$

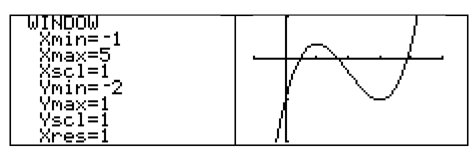
$\Delta > 0$ donc $x^2 - 4x + 3$ admet deux racines distinctes : $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 3$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = 1$.

Autre méthode : si $a + b + c = 0$ alors 1 est racine du trinôme $ax^2 + bx + c$ (c'est le cas ici).
On sait que, lorsqu'elles existent, le produit des racines (distinctes ou confondues) du trinôme $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) est $\frac{c}{a}$ donc si 1 en est une racine, l'autre est $\frac{c}{a}$ $\left(\text{ici, } \frac{c}{a} = \frac{3}{1} = 3\right)$.

Pour tout réel x, le signe de f'(x) est donc celui d'une expression du type ax^2+bx+c ayant deux racines distinctes avec a>0 : il suffit d'appliquer le cours pour obtenir son signe.
Par application du théorème sur les variations, on en déduit alors :

<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>1</td><td></td><td>3</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>f'(x)</td><td></td><td>+</td><td>0</td><td>−</td><td>0</td><td>+</td><td></td></tr>
<tr><td>f(x)</td><td></td><td>↗</td><td>1/3</td><td>↘</td><td>−1</td><td>↗</td><td></td></tr>
</table>


</td></tr>
<tr><td>Représentation graphique</td><td>


</td></tr>
</table>

TP 16 : fonction i (rationnelle)

Fonction

$$f : x \mapsto \frac{x^3}{x-1}$$

Ensemble de définition
Intervalles de dérivation

$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

1 est le seul pôle de la fonction rationnelle f

donc f est définie sur $\mathscr{D} =]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ et dérivable sur $]-\infty;1[$ et sur $]1;+\infty[$.

Expression de la dérivée

$$\forall x \in \mathscr{D} : f'(x) = \frac{3x^2(x-1)-x^3(1)}{(x-1)^2} = \frac{3x^3-3x^2-x^3}{(x-1)^2} = \frac{2x^3-3x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}$$

<u>Argumentation</u> :

Dérivée de fonctions de référence (affines, cube), dérivée d'un quotient de fonctions

Tableau des variations

$\forall x \in \mathscr{D}$: $(x-1)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $x^2(2x-3)$

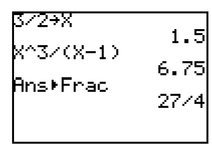
- $2x-3=0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

  2x -3 est une expression du type ax+ b avec a > 0 et ayant pour racine 3/2 : pour obtenir son signe, il suffit d'appliquer le cours avec ces données.
- $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

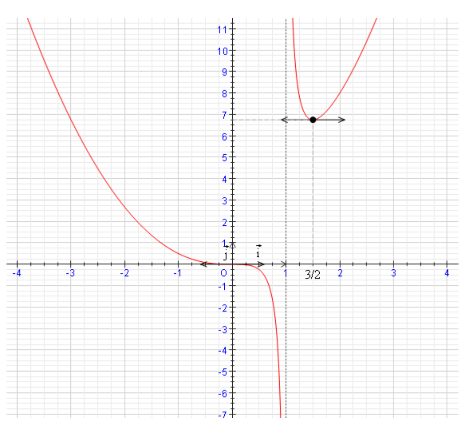
  x^2 est positive comme tout carré et nulle uniquement en 0.

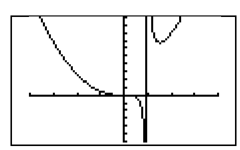
d'où par application du théorème sur les variations :

x	$-\infty$		0		1		$3/2$		$+\infty$
x^2		+	0	+		+		+	
$2x-3$		−		−		−	0	+	
$f'(x)$		−	0	−	‖	−	0	+	
$f(x)$		↘		↘	‖	↘	$27/4$	↗	



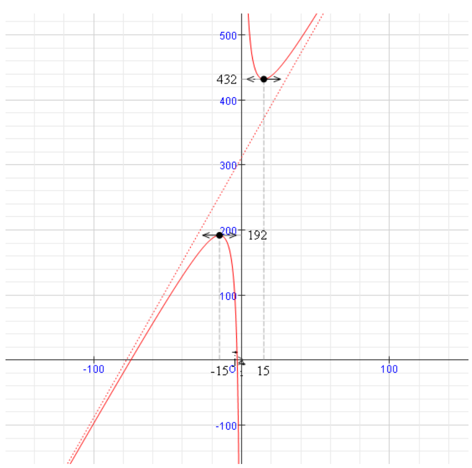
Représentation graphique

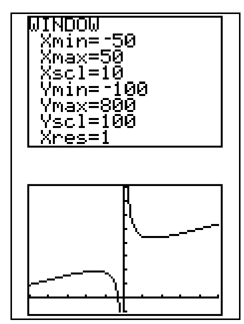




TP 16 : fonction j (rationnelle)

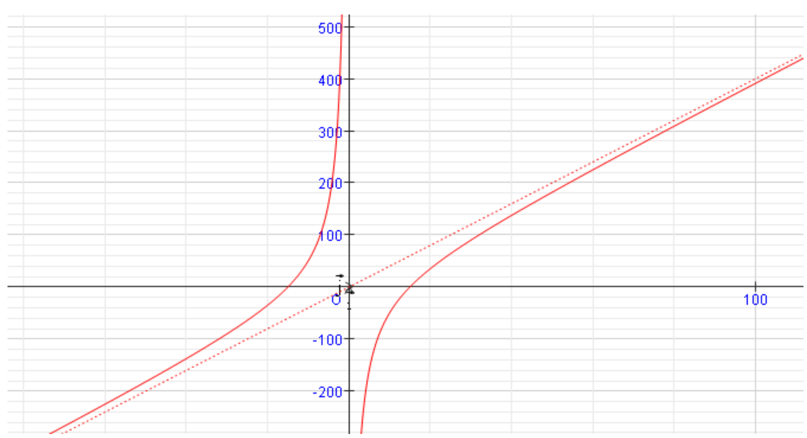
<table>
<tr><td>Fonction</td><td>f : x $\mapsto 4x + 312 + \dfrac{900}{x}$</td></tr>
<tr><td>Ensemble de définition
Intervalles de dérivation</td><td>0 est le seul pôle de la fonction rationnelle f donc
donc f est définie sur $\mathscr{D}$ =]-∞;0[∪]0; +∞[et dérivable sur]-∞;0[et sur]0;+∞[.</td></tr>
<tr><td>Expression de la dérivée</td><td>$\forall$ x ∈ ℝ : f'(x) = $4 - \dfrac{900}{x^2}$
<u>Argumentation</u> :
Dérivée de fonctions de référence (affines, inverse), dérivée du produit d'une fonction par une constante $\left(\dfrac{900}{x} = 900 \times \dfrac{1}{x}\right)$</td></tr>
<tr><td>Tableau des variations</td><td>$\forall$ x ∈ $\mathscr{D}$: f'(x) = $\dfrac{4x^2 - 900}{x^2}$ et comme $x^2 > 0$ alors f'(x) est du signe de $4x^2 - 900$
$4x^2 - 900 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = 900 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{900}{4} \Leftrightarrow x = \sqrt{\dfrac{900}{4}} = \dfrac{30}{2} = 15$ o u x = - 15
$4x^2 - 900$ est une expression du type $ax^2 + bx + c$ avec a > 0 et ayant deux racines -15 et 15 : pour obtenir son signe, il suffit d'appliquer le cours sur le signe d'un trinôme du second degré.

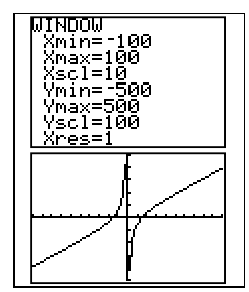
d'où par application du théorème sur les variations :
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>-15</td><td></td><td>0</td><td></td><td>15</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>+</td><td>0</td><td>−</td><td>‖</td><td>−</td><td>0</td><td>+</td><td></td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td></td><td>↗</td><td>192</td><td>↘</td><td>‖</td><td>↘</td><td>432</td><td>↗</td><td></td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>Représentation graphique</td><td>


</td></tr>
</table>

TP 16 : fonction j (rationnelle)

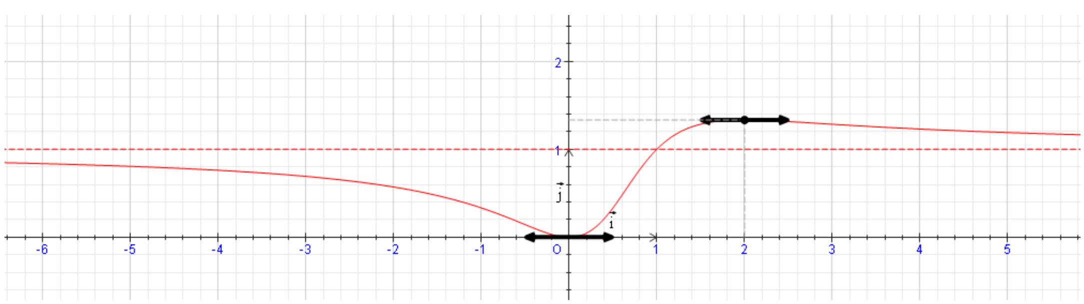
<table>
<tr><td>Fonction</td><td>f : x $\mapsto 4x - \dfrac{900}{x}$</td></tr>
<tr><td>Ensemble de définition
Intervalles de dérivation</td><td>0 est le seul pôle de la fonction rationnelle f
donc f est définie sur $\mathscr{D}$ =]-∞;0[∪]0; +∞[et dérivable sur]-∞;0[et sur]0;+∞[.</td></tr>
<tr><td>Expression de la dérivée</td><td>$\forall$ x ∈ $\mathbb{R}$: f'(x) = 4 + $\dfrac{900}{x^2}$
<u>Argumentation</u> :
Dérivée de fonctions de référence (affines, inverse), dérivée du produit d'une fonction par une constante $\left(\dfrac{900}{x} = 900 \times \dfrac{1}{x}\right)$</td></tr>
<tr><td>Tableau des variations</td><td>$\forall$ x ∈ $\mathscr{D}$: f'(x) est une somme de deux réels strictement positifs donc f'(x) >0.

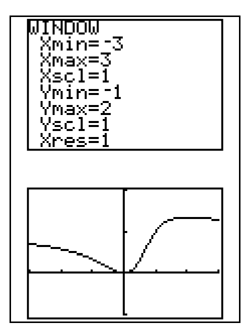
d'où par application du théorème sur les variations :
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td>+</td><td>‖</td><td>+</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>↗</td><td>‖</td><td>↗</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>Représentation graphique</td><td>


</td></tr>
</table>

TP 16 : fonction g (rationnelle)

<table>
<tr><td>Fonction</td><td>$f : x \mapsto \dfrac{x^2}{x^2 - x + 1}$</td></tr>
<tr><td>Ensemble de définition
Intervalles de dérivation</td><td>Pour $x^2 - x + 1$, $\Delta = b^2 - 4ac$ avec $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases}$ donc $\Delta = 1 - 4 = -3$ donc $x^2 - x + 1$ est sans racine.
fest donc une fonction rationnelle définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.</td></tr>
<tr><td>Expression de la dérivée</td><td>$\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = \dfrac{2x(x^2-x+1)-x^2(2x-1)}{(x^2-x+1)^2} = \dfrac{2x^3 - 2x^2 + 2x - 2x^3 + x^2}{(x^2-x+1)^2} = \dfrac{2x - x^2}{(x^2-x+1)^2}$
<u>Argumentation</u> :
Dérivée de fonctions de référence (affines, inverse), dérivée d'une somme et d'un quotient de fonctions.</td></tr>
<tr><td>Tableau des variations</td><td>$\forall x \in \mathbb{R} : (x^2-x+1)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $2x - x^2$
$2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(2-x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ 2 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = 2 \end{cases}$
$2x^2 - x^2$ est une expression du type $ax^2 + bx + c$ avec $a < 0$ et ayant deux racines 0 et 2 : pour obtenir son signe, il suffit d'appliquer le cours sur le signe d'un trinôme du second degré.

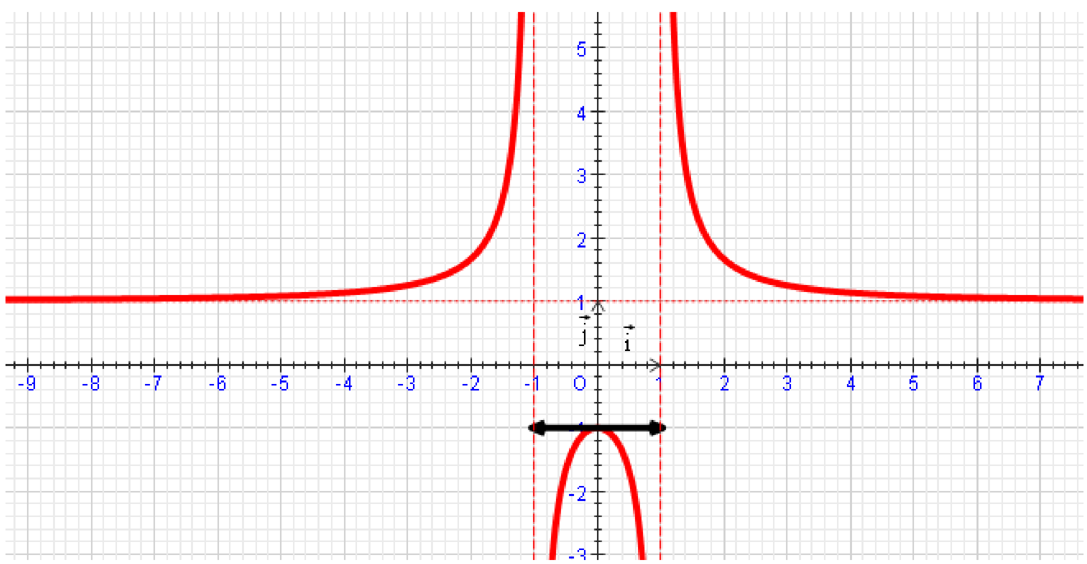
d'où par application du théorème sur les variations :
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>0</td><td></td><td>2</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td></td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td></td><td>↘</td><td>0</td><td>↗</td><td>4/3</td><td>↘</td><td></td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>Représentation graphique</td><td>


</td></tr>
</table>

TP 16 : fonction m (rationnelle)

<table>
<tr><td>Fonction</td><td>$f : x \mapsto \frac{x^2+1}{x^2-1}$</td></tr>
<tr><td>Ensemble de définition
Intervalles de dérivation</td><td>$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{1} = 1$ ou $x = -1$
La fonction rationnelle f a donc pour pôles -1 et 1
donc m est définie sur $\mathscr{D} =]-\infty; -1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$ et dérivable sur $]-\infty; -1[$, sur $]-1;1[$ et sur $]1;+\infty[$.</td></tr>
<tr><td>Expression de la dérivée</td><td>$\forall x \in \mathscr{D} : f'(x) = \frac{(2x)(x^2-1)-(x^2+1)(2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^3 -2x -2x^3 -2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$
<u>Argumentation</u> :
Dérivée de fonctions de référence (carré, constante), dérivée d'une somme et d'un quotient de fonctions</td></tr>
<tr><td>Tableau des variations</td><td>$\forall x \in \mathscr{D} :$ $(x^2-1)^2 > 0$ et comme 4 >0 alors f'(x) est du signe de –x donc aussi du signe opposé à x.

d'où par application du théorème sur les variations :

<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-1</td><td></td><td>0</td><td></td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td>$+$</td><td>||</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>||</td><td>$-$</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>↗</td><td>||</td><td>↗</td><td>-1</td><td>↘</td><td>||</td><td>↘</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>Représentation graphique</td><td>
</td></tr>
</table>

TP 16 : fonction h (rationnelle)

<table>
<tr><td>Fonction</td><td>$f : x \mapsto \frac{5-x^2}{x+1}$</td></tr>
<tr><td>Ensemble de définition
Intervalles de dérivation</td><td>$x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$
La fonction rationnelle f a donc -1 comme unique pôle
donc f est définie sur $\mathscr{D} =]-\infty;-1[\ \cup]-1;+\infty[$ et dérivable sur $]-\infty;-1[$ et sur $]-1;+\infty[$.</td></tr>
<tr><td>Expression de la dérivée</td><td>$\forall x \in \mathscr{D} : f'(x) = \frac{(-2x)(x+1)-(5-x^2)}{(x+1)^2} = \frac{-2x^2-2x-5+x^2}{(x+1)^2} = \frac{-x^2-2x-5}{(x+1)^2}$
<u>Argumentation</u> :
Dérivée de fonctions de référence (carré, constante, affines), dérivée d'une somme et d'un quotient de fonctions</td></tr>
<tr><td>Tableau des variations</td><td>$\forall x \in \mathscr{D}$: $(x+1)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-x^2-2x-5$.
Pour $-x^2-2x-5$: $\Delta = (-2)^2 - 4\times(-1)(-5) = -4-20 = -24$.
$\Delta<0$ donc $-x^2-2x-5$ est du signe du coefficient de x^2 donc toujours strictement négatif.

d'où par application du théorème sur les variations :

<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-1</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>f'(x)</td><td>$-$</td><td>‖</td><td>$-$</td></tr>
<tr><td>f(x)</td><td>↘</td><td>‖</td><td>↘</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>Représentation graphique</td><td></td></tr>
</table>

TP 16 : fonction q (rationnelle)

Fonction

$f : x \mapsto \dfrac{x^2-2x-2}{2x^2-4x-6}$

Ensemble de définition
Intervalles de dérivation

Pour $2x^2 -4x -6$, $\Delta = b^2 -4ac$ avec $\begin{cases} a=2 \\ b=-4 \\ c=-6 \end{cases}$ donc $\Delta = 16 +48 = 64 = 8^2$.

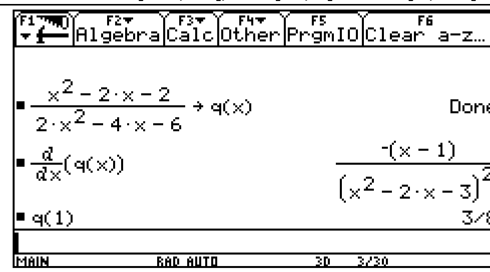
$\Delta > 0$ donc $2x^2 - 4x -6$ admet deux racines distinctes : $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = 3$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = -1$.

La fonction rationnelle f a donc deux pôles : -1 et 3
donc f est définie sur $\mathscr{D} =]-\infty; -1[\cup]-1;3[\cup]3;+\infty[$ et dérivable sur $]-\infty; -1[$, sur $]-1;3[$ et sur $]3;+\infty[$.

Expression de la dérivée

$\forall x \in \mathscr{D} : f'(x) = \dfrac{(2x-2)(2x^2-4x-6)-(x^2-2x-2)(4x-4)}{(2x^2-4x-6)^2}$

$= \ldots\ldots = \boxed{\dfrac{-x+1}{(x^2-2x-3)^2}}$



(à noter que ce résultat peut être facilement obtenu par un logiciel de calcul formel. En devoir, afin de vous permettre de continuer, ou pour ne pas favoriser ceux qui pourraient disposer d'un tel instrument de calcul, il est fort possible que le résultat encadré soit donné. Les points seront alors attribués à ceux qui seront capable d'obtenir "à la main" ce résultat)

<u>Argumentation</u> :
Dérivée de fonctions de référence (carré, affines), dérivée d'une somme, du produit d'une fonction par une constante (pour $2x^2$) et d'un quotient de fonctions.

Tableau des variations

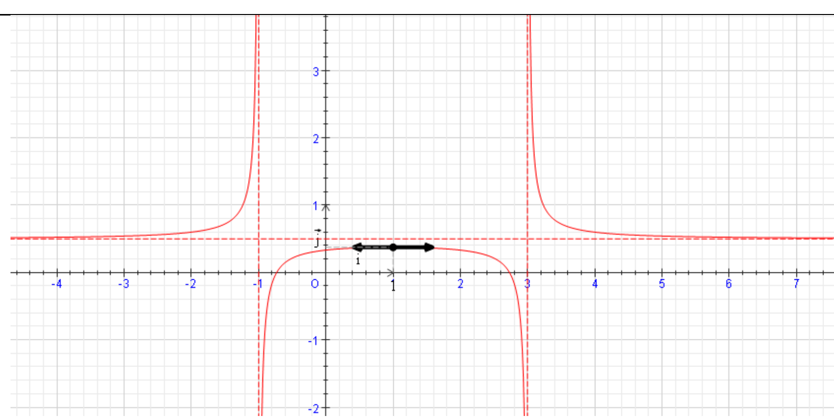
$\forall x \in \mathscr{D}$: $(2x^2-4x-6)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-x+1$.

- $-x+1=0 \Leftrightarrow x = 1$
  $-x+1$ est une expression du type $ax+b$ avec $a<0$ et ayant pour racine 1 : pour obtenir son signe, il suffit d'appliquer le cours avec ces données.

d'où par application du théorème sur les variations :

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	+	0	−	‖	−	
$f(x)$		↗	‖	↗	3/8	↘	‖	↘	

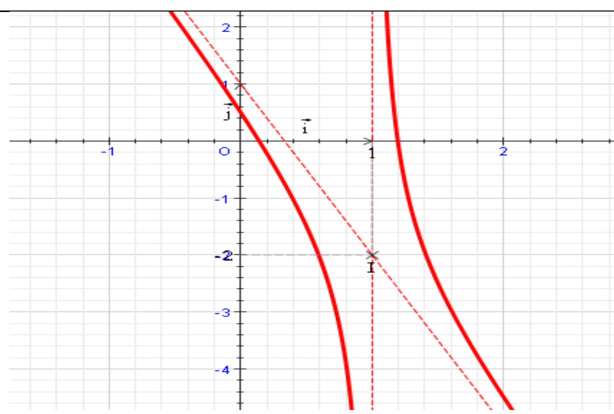
Représentation graphique



TP 16 : fonction r (rationnelle)

<table>
<tr><td>Fonction</td><td>f : x $\mapsto -3x + 1 + \frac{1}{2x-2}$</td></tr>
<tr><td>Ensemble de définition
Intervalles de dérivation</td><td>2x-2 =0 ⇔ x = 1
La fonction rationnelle f a donc un pôle : 1
donc f est définie sur $\mathcal{D}$ =]- ∞; 1[∪]1;+∞[et dérivable sur]- ∞; 1[et sur]1;+∞[.</td></tr>
<tr><td>Expression de la dérivée</td><td>$\forall$ x ∈ $\mathcal{D}$: f'(x) = $-3 - \frac{2}{(2x-2)^2} = -3 + \left(-\frac{2}{(2x-2)^2}\right)$

<u>Argumentation</u> :
Dérivée de fonctions de référence (affines), dérivée d'une somme, de l'inverse d'une fonction</td></tr>
<tr><td>Tableau des variations</td><td>$\forall$ x ∈ $\mathcal{D}$, f'(x) est une somme de deux nombres strictement négatifs donc f'(x) <0

d'où par application du théorème sur les variations :
<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>f'(x)</td><td>$-$</td><td>‖</td><td>$-$</td></tr><tr><td>f(x)</td><td>↘</td><td>‖</td><td>↘</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Représentation graphique</td><td>
</td></tr>
</table>