Cours 09/02 : Applications du produit scalaire

I/ Calculs d'angles et de longueurs

Voir cours 09/01

II/ Application en géométrie analytique : équations cartésiennes de droites et cercles

Définition 1

On dit qu'un vecteur non nul $\vec{n}$ est **normal** à une droite s'il est orthogonal à un vecteur directeur d'une droite $\mathscr{D}$.

Propriété 2 : Comme tous les vecteurs directeurs d'une droite sont ………………………………. entre eux, si un vecteur est normal à une droite $\mathscr{D}$ alors il est orthogonal à ……………………………………………………………………………………..

Propriété 3
Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan.
Soit a et b deux réels dont l'un au moins est non nul. Soit c un réel.

Si une droite $\mathscr{D}$ a pour équation $ax + by + c = 0$
alors :

- le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$
- **si le repère est orthonormé, le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de la droite $\mathscr{D}$.**

Réciproquement :
Si :

- $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur d'une droite $\mathscr{D}$
- **ou si le repère est orthonormé et $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est un vecteur normal d'une droite $\mathscr{D}$**

alors cette droite $\mathscr{D}$ admet une équation du type $ax + by + c = 0$.

Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère orthonormé du plan :

Exemple A : 1°) Tracer la droite d'équation 2x +3 y +1 = 0.

2°) Déterminer une équation de la droite $\mathscr{D}$ passant par A (2 ; 4) et dont $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal.

Exercice B : Déterminer de deux façons une équation du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [AB] où A(3 ; 3) et B(5 ;1).

Propriété 4
Soit A et B deux points et $\mathscr{C}$ un cercle de diamètre [AB] alors $\mathscr{C}$ est l'ensemble des points M tels que ……………………………

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan :

- la relation ……………………………………………. nous donne une première méthode d'obtention d'une équation de $\mathscr{C}$.
- Si Ω (a ;b) est le centre du cercle, et R son rayon, alors une équation de $\mathscr{C}$ est

……………………………………………………………

III/ Application en trigonométrie

Exercice C : Le cosinus d'une somme de réels est-il la somme des cosinus de ces deux réels ?

Propriété 5 : formule d'addition du cosinus

Soit a et b deux réels.

1. $cos\ (a+\ b)\ =$
2. $cos\ (a-b)$ =

On en déduit la **propriété 6** (formule de «changement de monde») :

3. $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=$
4. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=$

Exemple D : Exprimer $\cos\left((a-b)+\frac{\pi}{2}\right)$ en fonction de $\sin(a-b)$

Propriété 7 : formule d'addition du sinus

Soit a et b deux réels.

1. $sin\ (a+\ b)\ =$
2. $sin\ (a-b)$ =

On en déduit la **propriété 8** (formule de «changement de monde») :

3. $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=$
4. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=$

Exemple E :

1°) Vérifier que $\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}$ puis calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

2°) Calculer $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

Exemple F :

1°) Prouver que pour tout réel a, $\boxed{cos\ (2a)=\ 1-2\ sin^2 a}$.

2°) Trouver d'autres formules dites de « duplication » pour $\cos(2a)$ et $\sin(2a)$.

3°) Calculer $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Propriété 9 : formule de duplication

1.
2.
3.
4.
5.
6.