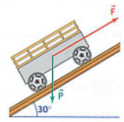


Cours 09/01 : Produit scalaire et théorème de Pythagore

Définition 1

Soit $\vec{u}$ un vecteur et A et B deux points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$
La longueur ou norme d'un vecteur $\vec{u}$ notée $\|\vec{u}\|$ est la distance AB.

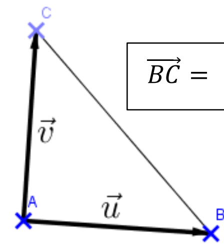
Remarque : $\|-\vec{u}\|$ = ………………

Conséquence : **expression du théorème de Pythagore avec les normes**

Soit ABC un triangle, $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

ABC est rectangle en A ⇔ (……………………………………………………………………….)

ABC est rectangle en A ⇔ (……………………………………………………………………….)



$\overrightarrow{BC} =$

Définition 2

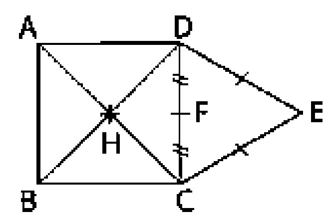
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

Le produit scalaire de deux vecteurs est le réel notée $\vec{u}.\vec{v}$ défini par : $\vec{u}.\vec{v}$ =

Conséquence 3 : Pour tous points A, B et C du plan : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ =

Activité A : ABCD est un carré de centre H et de côté 4.
DCE est un triangle équilatéral tel que E ne soit pas à l'intérieur du carré. F est le milieu de [CD].
Prouver que :

a) $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DB} = 16$
b) $\overrightarrow{HD}.\overrightarrow{HB} = -8$
c) $\overrightarrow{EC}.\overrightarrow{FC} = 2\sqrt{3}$



Définition 4 :
Dire que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux signifie que ………………………………………… ce que l'on note par …………………

Activité B : Démontrer que le vecteur $\vec{0}$ est orthogonal à tout vecteur $\vec{u}$ **.**

Conséquences 5 :

1. Soit ABC un «vrai» triangle, $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ (donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls)

   $\vec{u} \perp \vec{v}$ ⇔ ………………………………………………………………

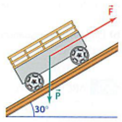
2. $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ avec $A \neq B$ et $C \neq D$ (donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls)

   $\vec{u} \perp \vec{v}$ ⇔ ………………………………………………………………

Activité C : on reprend les données de l'activité A.
1°) Prouver que $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{EF} = 0$
2°) En déduire que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EF} = 0$

Logique et rigueur :

Peut–on écrire : ($\vec{u}.\vec{v} = 0$) ⇔ ($\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$) ☐ oui ☐ non



Cours 09/02 : Expression analytique du produit scalaire

Théorème 1 : Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère orthonormé.

Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ par rapport à la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

On a alors $\|\vec{u}\|$ = …………………. et pour tout réel k, on a : $\|\overrightarrow{ku}\|$ = ………………………

Activité A

Dans un repère orthornormé, on donne les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Calculer le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Théorème 2 : **expression analytique du produit scalaire de deux vecteur**s

Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère orthonormé, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ par rapport à la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

On a alors : $\vec{u}\,.\,\vec{v} =$

Activité B

Reprendre les calculs de l'activité 1 à partir du théorème B.

L'expression analytique du produit scalaire permet de démontrer facilement les propriétés suivantes :

Propriétés 3 : Pour tous vecteurs $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ et tout nombre réel k, on a :

1) **Symétrie du produit scalaire** : $\vec{v}.\vec{u} =$ ……

2) **Bilinéarité** :

$\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) =$ $\qquad$ $(k\vec{u}).\vec{v} =$

$\overrightarrow{(u+\vec{v})}.\vec{w} =$ $\qquad$ $\vec{u}.(k\vec{v}) =$

Définition 4 :

La **carré scalaire** d'un vecteur $\vec{u}$, noté $\vec{u}^2$, est le produit scalaire ………

Conséquences 5 : propriétés E

- Pour tout vecteur $\vec{u}$, on a : $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$ donc pour tous points A et B, on a :
- **Egalités remarquables** :

$(\vec{u}+\vec{v})^2 =$

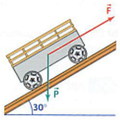
$(\vec{u}-\vec{v})^2 =$

$(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) =$

Activité 3 :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs tels que : $\|\vec{u}\| = 2$, $\vec{v}^2 = 3$ et $\vec{u}.\vec{v} = -\frac{1}{2}$.

Calculer mentalement : $\vec{u}^2$; $\vec{u}.(2\vec{u}-\vec{v})$; $(\vec{u}+\vec{v})^2$; $(\vec{u}-\vec{v})^2$.



Cours 09/03 : L'exercice dont Cédric Villani parle

1°) (niveau $3^{ème}$)

Prouver que :

« La somme des carrés des côtés d'un rectangle est égale à la somme des carrés de longueurs des diagonales ».

2°) Montrer que pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a : $2\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2\right) = \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2$.

3°) En déduire que la propriété de la question 1 est aussi vraie pour un parallélogramme.