Olympiades AP 2

Thème : dimensions (aires, périmètres…) sous contraintes (systèmes, inégalités…)

On considère deux rectangles R et S dont les dimensions sont des entiers naturels non nuls.

On dira que ces deux rectangles R et S constituent « une paire de rectangles amicaux » lorsque le périmètre du rectangle R est égal à l'aire du rectangle S et lorsque l'aire du rectangle R est égal au périmètre du rectangle S.

1. a) Le rectangle R de dimensions 1 et 38 et le rectangle S de dimensions 6 et 13 constituent-ils « une paire de rectangles amicaux » ?

   oui

   b) Le rectangle R a pour dimensions 2 et 10 .
   Peut-on trouver un (ou des) rectangle(s) S tel que R et S constituent « une paire de rectangles amicaux » ? Si oui, déterminer ce (ou ces) rectangle (s) .

   oui
   pour (2;10) avec (2;6)

   c) On sait que le rectangle R a une dimension égale à 3 et que le rectangle S a une dimension égale à 8.
   Peut-on trouver des rectangles R et S constituant « une paire de rectangles amicaux » ?

   non

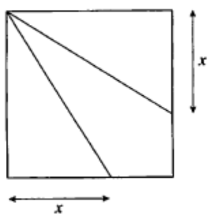
2. On note a, b les dimensions du rectangle R , c et d les dimensions du rectangle S. On suppose que les entiers naturels a, b, c et d vérifient : $a \leqslant b$, $c \leqslant d$ et $a \leqslant c$.

   On admet avoir montré que $1 \leqslant c \leqslant 8$ et $1 \leqslant a \leqslant 4$.
   Déterminer alors toutes « les paires de rectangles amicaux ».

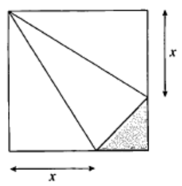
   Il y en a 7 dont (1;54) avec (5;22)…

Sur les calculs d'aires

Aire de triangles



1. Léonard est géomètre. Il veut partager un carré de côté 1 en trois parties de même aire selon le schéma ci-contre. Quelle valeur doit-il donner à x pour arriver à ses fins ?



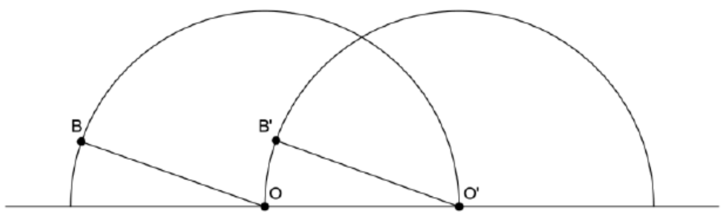
2. Mais Léonard est aussi esthète. Ne trouvant pas élégante sa construction, il décide de supprimer la zone triangulaire grisée. Ainsi les trois parties restantes sont triangulaires.
Peuvent-elles avoir la même aire ?

Réponse : oui, pour x = 2/3

Réponse : oui, pour x = $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Aire de disques

Le pare–brise d'un véhicule possède deux essuie–glaces modélisés par deux segments [OB] et [O'B'] de même longueur R, l'un tournant autour d'un point O, l'autre autour d'un point O', els que OO'=R. Ces balais en caoutchouc couvrent la longueur totale de chaque segment. L'extrémité de chaque segment décrit un demi–cercle au dessus de la droite (OO'). Déterminer l'aire de la surface du pare–brise essuyée par les balais.



Réponse : $R^2\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$