

TD 17 : probabilités et loi binomiale

Exercice 1

Une classe compte 30 élèves et 20 filles. A chaque cours de mathématiques, le professeur interroge au hasard un élève de la classe, sans se rappeler quels élèves il a interrogés.

On considère un entier n non nul et on note X la variable aléatoire qui correspond au nombre de filles interrogées au cours de n jours de cours consécutifs.

- 1°) Quelle est la loi de X ?
- 2°) Quelle est la probabilité que sur 10 jours consécutifs, soient interrogées 4 filles exactement ?
- 3°) Quelle est la probabilité que sur 10 jours consécutifs, soient interrogées au moins 4 filles ?
- 4°) Déterminer la valeur de n à partir de laquelle la probabilité qu'aucune fille ne soit interrogée soit inférieure à 0,001 ?

Exercice 2

Bob le lièvre et Alice la tortue lancent un dé : s'il tombe sur 6, le lièvre gagne et le jeu s'arrête. S'il tombe sur un autre numéro, la tortue avance d'une case. La tortue gagne si elle parvient à avancer de n cases (n non nul).

Les lancers se poursuivent jusqu'à ce qu'il y ait un gagnant.

On note $p_n(T)$ et $p_n(L)$ les probabilités respectives que la tortue gagne et que le lièvre gagne.

Partie A : étude du cas $n = 4$

- 1) A votre avis, lequel des deux concurrents semble favorisé ? (aucune justification demandée)
- 2) Compétence : Calculer $p_4(T)$ puis $p_4(L)$.
- 3) On note X la variable aléatoire donnant le nombre de lancers nécessaires pour obtenir un vainqueur.
 - a) Compétence : Combien de lancers faut-il en moyenne pour avoir un gagnant ?
 - b) Dix parties sont jouées. Quelle est la probabilité que la tortue gagne exactement 5 fois ? Au moins une fois ?

Partie B : cas général (n non fixé)

Calculer $p_n(T)$ et déterminer pour quelles valeurs de n le jeu est favorable à la tortue.

Exercice 3

Une compagnie de transport désire optimiser les contrôles afin de limiter l'impact des fraudes.

Cette compagnie effectue une étude basée sur 2 trajets par jour pendant les 20 jours ouvrables d'un mois, soit au total 40 trajets.

On admet que les contrôles sont indépendants les uns des autres et que la probabilité pour tout voyageur d'être contrôlé est p .

Un trajet coûte 10 \$, en cas de fraude, l'amende est de 100 \$.

Théo fraude systématiquement lors des 40 trajets étudiés.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de trajets où Théo a été contrôlé.

- 1°) On suppose que $p = 0,05$.
 - a) Calculer la probabilité que Théo soit contrôlé au plus 2 fois (arrondi à 10^{-4}).
 - b) Soit Z la variable aléatoire donnant le gain algébrique réalisé par Théo.
Exprimer Z en fonction de X et en déduire que $E(Z) = 180$ \$.

2°) On ne connaît pas la valeur de p .

Pour quelles valeurs de p , la fraude est-elle systématiquement favorable à Théo ? Justifier.

Devoir maison

Le but est de proposer un modèle utilisant les probabilités pour aider à résoudre une difficulté décisionnelle.

4 témoins ont vu un individu sortir précipitamment de l'immeuble où un coup de feu a été entendu. Il faisait noir mais il semble que l'individu se soit ensuite dirigé vers un vidéo club. La police a interpellé les 10 clients du magasin qui déclarent ne pas se connaître et ne s'être aperçus de rien...

Situation 1

Au commissariat de Police, les 10 clients sont proposés à l'identification devant les 4 témoins de la scène. Les témoins passent les uns après les autres, sans avoir connaissance du résultat des autres témoins. A l'issue de la procédure, l'un des clients est désigné deux fois. **Est-ce que cela constitue une lourde charge contre lui ?**

Pour répondre à la question, on considère l'expérience aléatoire " les 4 témoins désignent chacun au hasard un client" et on calculera, par simulation, la fréquence de l'événement "un client est désigné exactement deux fois".

Situation 2

La police attribue un matricule différent à chaque client choisi par les nombres entiers de 1 à 10.

Le discours du client n° 6 éveille un peu les soupçons de la police.

Lors de l'identification, le client n° 6 est désigné par exactement 2 témoins.

Est-ce que cela constitue une lourde charge contre lui ?