Cours 11/3 : **Variations d'une suite numérique**

Définition 1 : Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **croissante** si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geqslant u_n$
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **décroissante** si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leqslant u_n$
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **monotone** lorsqu'elle est croissante ou décroissante

Méthodes d'étude des variations d'une suite

Pour déterminer le sens de variation d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut :

- 1**/ Déterminer le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$** (la suite (u_n) est définie additivement')

  Exemple A : Montrer qu'une suite arithmétique $(u_n)_{n\geq 0}$ de raison 3 est croissante.

- 2/ **Si pour tout n : $u_n \neq 0$, comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 lorsque (u_n) est de signe constant**.

  (la suite (u_n) est définie 'multiplicativement' ')

  Exemple :

  Cas où $u_n > 0$ alors : $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1 \Leftrightarrow u_{n+1} \geqslant u_n \Leftrightarrow (u_n)$ est croissante.

  $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1 \Leftrightarrow u_{n+1} \leqslant u_n \Leftrightarrow (u_n)$ est décroissante.

  Cas où $u_n < 0$ alors : $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1 \Leftrightarrow$ .... $\Leftrightarrow (u_n)$ est ....

  Exemple B :

  a) Que peut–on dire des variations d'une suite géométrique $(u_n)_{n\geq 0}$ de premier terme u_0 positif et de raison $\frac{1}{2}$?

  b) Cas général : Que peut–on dire des variations d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison non nulle q ?

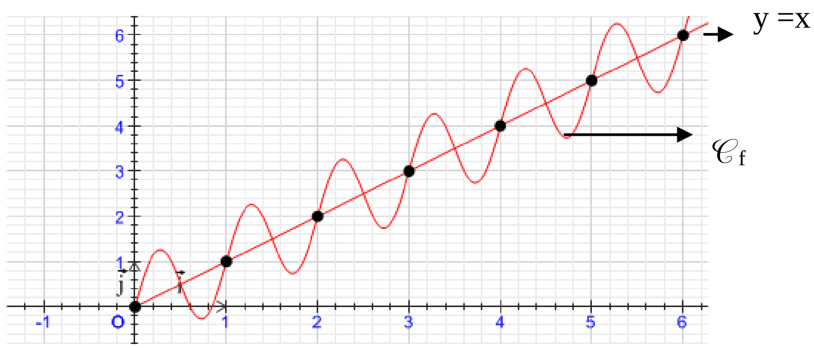
- 3/ Appliquer le théorème suivant :

Théorème 2 :
Si pour tout entier naturel n, $u_n = f(n)$ et si f est monotone sur $[0\,;+\infty[$ alors (u_n) est monotone.

Exemple C : Etudier les variations de la suite (u_n) telle que $u_n = \sqrt{n} - 2$ pour tout entier naturel n.

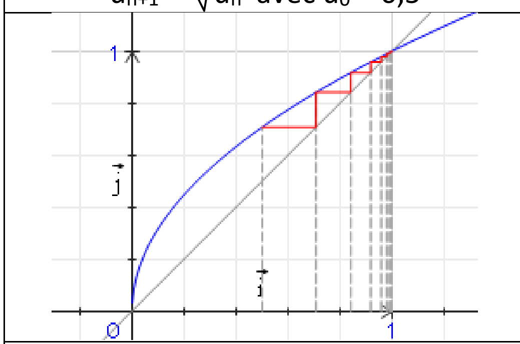
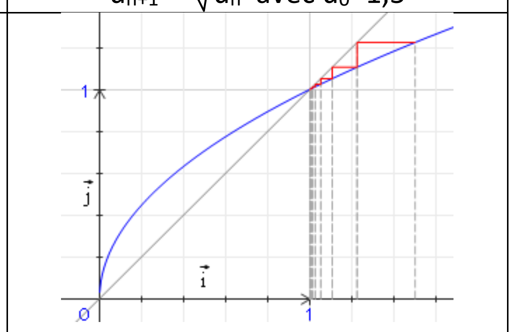
Attention, **la réciproque du théorème 2 est fausse** :

<u>Exemple D</u> : Soit f une fonction définie sur [0;+∞[et représentée ci‒dessous



- 4/ Si $u_{n+1} = f(u_n)$, il n'y a pas de théorèmes simples liant variations de f à celle de u_n (attendre le cours de terminale)

<u>Exemple E</u> :

$u_{n+1} = \sqrt{u_n}$ avec $u_0 = 0,5$	$u_{n+1} = \sqrt{u_n}$ avec $u_0=1,5$
	
0.5 .5 √(Ans) .7071067812 .8408964153 .9170040432 .9576032807	1.5 1.5 √(Ans) 1.224744871 1.10668192 1.051989506 1.025665396