TD 23 : suites et variations

Exercice 1

Déterminer les quatre premiers termes des suites proposées ci–dessous puis étudier leurs variations :

1°) (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

2°) (u_n) est la suite définie pour n> 1 par $u_n = \sqrt{n-2}$

3°) (u_n) est la suite définie pour $n \geqslant 0$ par $u_n = \dfrac{n+3}{2n+1}$

4°) (u_n) est la suite définie pour $n \geqslant 1$ par $u_n = n^2-3n + \dfrac{13}{4}$.

5°) (u_n) est la suite définie pour n >0 par $u_n = 3^n-n$

6°) (u_n) est la suite définie pour n >0 par $u_n = 7\times1{,}2^n$

7°) (u_n) est la suite définie pour $n \geqslant 1$ par $u_n = \dfrac{4^n}{n^2}$

8°) (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{2^n}{n+1}$

9°) (u_n) est la suite définie par $\begin{cases} u_0=5 \\ \text{pour } n \geqslant 0,\ u_{n+1}= -2 + u_n \end{cases}$

10°) (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2\times0{,}5^n$

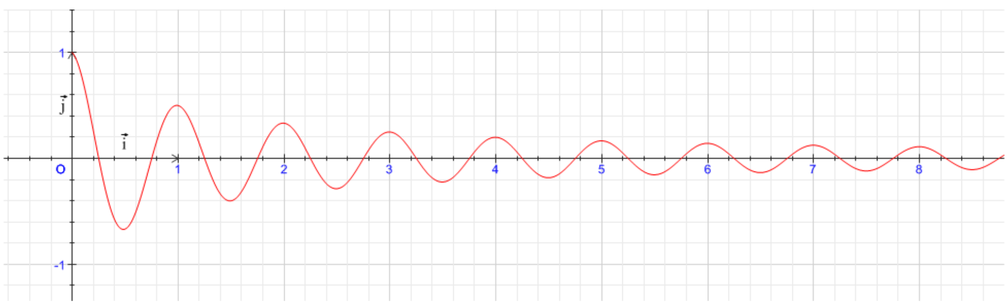
Exercice 2

A quelles conditions une suite arithmétique (respectivement géométrique) est-elle croissante ?

Exercice 3

Soit la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\cos(2\pi x)}{x+1}$ et la suite de terme général $u_n = f(n)$.

1°) On donne ci–dessous une représentation graphique de f. La fonction f est–elle monotone sur $[0;+\infty[$?



2°) Exprimer u_n en fonction de n puis montrer que la suite (u_n) est décroissante.

Exercice 4

Soit la suite (u_n), définie par $u_1 = 1$ et pour tout $n \geqslant 1$ par : $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{2n} u_n$.

1°) **Calculer** les termes de la suite jusqu'à u_4.

2°) On admet que, pour tout naturel n, $u_n > 0$. **Démontrer** que la suite (u_n) est décroissante.

Exercice 5

1°) Soit la suite (u_n) définie pour $n \geq 0$ par $u_n = \sqrt{n}$. Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ?

2°) Soit la suite (u_n) définie par pour tout $n \geq 0$ $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$ et $u_0 = 0{,}5$.

Conjecturer numériquement et graphiquement le sens de variation de (u_n).

3°) Reprendre la question 2 avec $u_0 = 1{,}5$?

Exercice 6 : défi

Etudier les variations de la suite définie pour tout entier n par $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$.

1°) Montrer que $x_3 = \frac{19}{20}$.

2°) Conjecturer la nature de ses variations puis valider cette conjecture.