Corrigé 4B

1°) Pour tout entier n : $v_{n+1} = 4\ u_{n+1} - 6(n+1) + 15 = 4\left(\frac{1}{3} u_n + n\text{-}1\right) - 6n - 6 + 15 = \frac{4}{3} u_n - 2n + 5 = \frac{1}{3}(4\ u_n - 6n + 15) = \frac{1}{3} v_n$

donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de 1er terme $v_0 = 4\ u_0 - 6\times 0 + 15 = 19$.

2°) Avec 1°), pour tout entier n : $\boxed{v_n = \text{"}\ v_0 \times q^n\ \text{"} = 19\left(\frac{1}{3}\right)^n}$

3°) Pour tout entier n : $v_n = 4\ u_n - 6n + 15$ donc $u_n = \frac{1}{4}(v_n + 6n - 15)$ d'où avec 2° : $u_n = \frac{1}{4} \times \left(19\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6n - 15\right) = \boxed{\frac{19}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{6n\text{-}15}{4}}$ CQFD

4°) $\frac{19}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ est une expression du type " $w_0\ q^n$ " donc on peut lui associer une suite géométrique (w_n) de raison $\frac{1}{3}$ et de 1er terme $w_0 = \frac{19}{4}$.

$\frac{6n\text{-}15}{4} = \frac{3}{2} n - \frac{15}{4} = \left(-\frac{15}{4}\right) + \frac{3}{2} n$ est une expression du type " $t_0 + r\times n$" donc on peut lui associer une suite arithmétique (t_n) de raison $\frac{3}{2}$ et de 1er terme $-\frac{15}{4}$.

5°)

$u_0 + u_1 + \ldots + u_n$

$= w_0 + w_1 + \ldots + w_n + t_0 + t_1 + \ldots + t_n$

$= \left[w_0 + w_0 \times \frac{1}{3} + \ldots + w_0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] + \left[\frac{(t_0 + t_n)\times(n+1)}{2}\right]$

$= \left[w_0 \times \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{3} - 1}\right] + \left[\frac{\left(-\frac{15}{4} + -\frac{15}{4} + n \times \frac{3}{2}\right) \times (n+1)}{2}\right] = \frac{57}{8}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)\right]^{n+1} + \frac{3\ (n-5)(n+1)}{4}$ CQFD