

Devoir d'entraînement B

Exercice 1B (7 points)

Soit la suite (u_n) définie pour tout n de \mathbb{N} par
$$\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1 \end{cases}$$

- 1°) Calculer les valeurs exactes de u_1, u_2, u_3 .
- 2°) Soit la suite (v_n) définie pour tout n de \mathbb{N} par $v_n = u_n - 3$.
 - a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{2}{3}$.
 - b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n .
- 3°) Exprimer u_n en fonction de v_n , puis de n .

Exercice 2B (5 points)

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = u_n - 4n + 7$

- 1°) Montrer que la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.
- 2°) Avec votre calculatrice, donner la valeur exacte de u_{17} .
- 3°) Montrer que la suite (d_n) définie pour tout entier naturel par $d_n = u_{n+1} - u_n$ est une suite arithmétique. Donner sa raison.
- 4°) Calculer $S_n = d_0 + d_1 + \dots + d_{n-1}$ puis en déduire l'expression, pour tout n de u_n en fonction de n .

Exercice 3B (3 points)

Un véhicule neuf acheté 14000 € perd 2 % de sa valeur tous les mois.

- 1°) Déterminer la valeur du véhicule à 1 € près au bout de 3 ans ? (on utilisera une modélisation par les suites)
- 2°) Déterminer, à l'aide d'une calculatrice, le temps au bout duquel la valeur du véhicule devient inférieure à 3000 €.

Exercice 4B (5 points)

On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 1 \end{cases}$$

Soit (v_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $v_n = 4u_n - 6n + 15$.

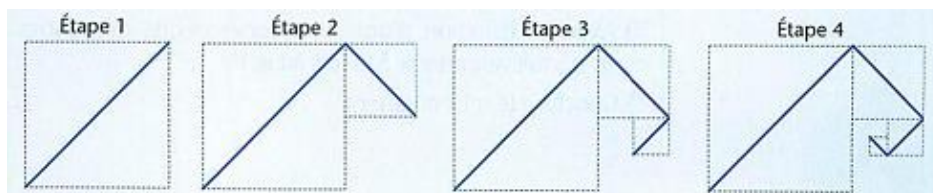
- 1°) Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
- 2°) Exprimer v_n en fonction de n .
- 3°) En déduire que pour tout entier n : $u_n = \frac{19}{4} \times \frac{1}{3^n} + \frac{6n-15}{4}$.
- 4°) En déduire que (u_n) est la somme d'une suite géométrique et d'une suite arithmétique (préciser les éléments caractéristiques).
- 5°) En déduire que $u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{57}{8} \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \right] + \frac{3(n-5)(n+1)}{4}$.

Exercice 5B

Jacques fume six paquets de vingt cigarettes par semaine et décide de diminuer sa consommation de quatre cigarettes par semaine à partir du 1^{er} janvier 2001. On note u_0 le nombre de cigarettes fumées la semaine du 24 décembre au 31 décembre 2000, u_1 celui de la première semaine 2001, u_2 celui de la deuxième semaine 2001, etc. On définit ainsi une suite (u_n) .

Au bout de combien de semaines Jacques s'arrête-t-il de fumer ? Combien a-t-il fumé de cigarettes durant cette période ?

Exercice 6B (2 points)



On construit une spirale en disposant bout à bout les diagonales d'une suite de carrés dont le premier a pour côté 1. Calculer la longueur de la spirale à l'étape n . Que peut-on en déduire ?