TD 21 : somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

Ce travail est à réaliser en autonomie par groupe de 2 ou 3 élèves. Pas d'échange entre les groupes.
Une feuille est remise à la fin de la séance pour chacun des groupes (à Alexis). Votre salle est surveillée par un système vidéo.

Exercice 1 (rappel)

1°) Démontrer que pour tout entier n non nul :

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

2°) Exprimer en fonction de n, la somme des n premiers nombres impairs.

Exercice 2

Soit q un réel différent de 1. On pose $S = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$.
1°) Montrer que :

$$\boxed{S - Sq = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}$$

A défaut de la démontrer, cette formule sera admise pour la suite.

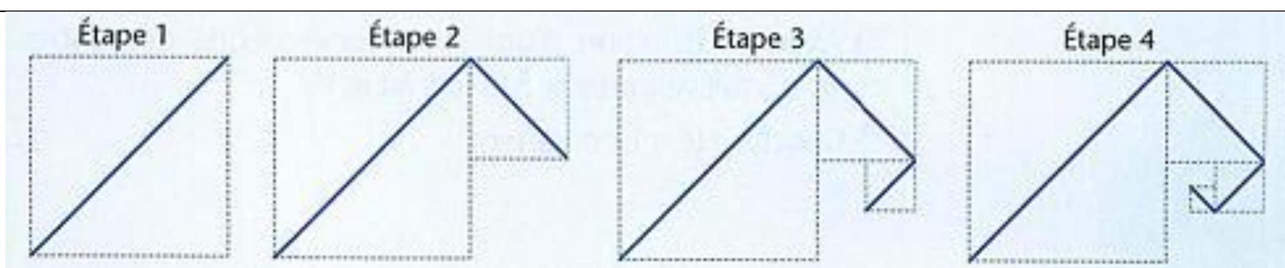
2°) Appliquer la formule encadrée pour prouver que : $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{11} = 4095$.
3°) Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.
On pose : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

a) Quel est le nombre de termes de S_n ?
b) Exprimer S_n en fonction de u_0, q et n.
c) Contrôler la formule proposée en 3b.

Exercice 3

Une suite géométrique est dite géométrique si l'on passe d'un terme à son suivant en le multipliant toujours un même nombre (appelé raison).
1°) Quelle est la raison de cette suite géométrique : $1 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{4} ; \frac{1}{8} ; \frac{1}{16}$ .... ?
2°) Quelle est la raison de cette suite arithmétique : 3 ; 1 ; –1 ; –3 ; –5 .... (Les réponses sont au verso)

Exercice 4

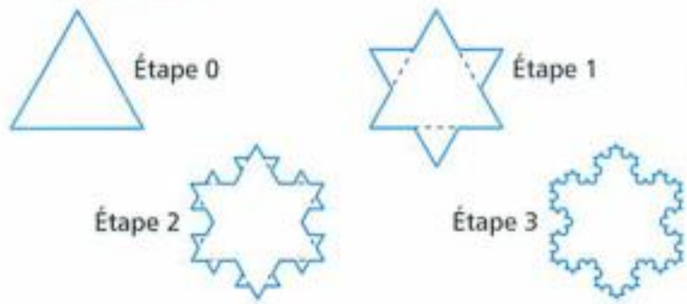


On construit une spirale en disposant bout à bout les diagonales d'une suite de carrés.
A chaque étape, le côté du carré est divisé par 2.
1°) Modéliser le calcul de la longueur de chaque segment formant la spirale à l'aide d'une suite. Quelle est la nature de la suite ?
2°) Calculer la longueur de la spirale au bout de n étapes (n entier naturel).
3°) Peut–on trouver un entier n telle que la longueur de la spirale dépasse le rayon terrestre ?

Exercice 5

On considère un triangle équilatéral T_0 de côté 1.
On construit un triangle équilatéral extérieur sur le tiers central de chaque côté de T_0. On obtient ainsi un polygone noté T_1.
Puis on répète la même construction.
Pour tout entier naturel n, on note :

- c_n le nombre de côtés de T_n.
- l_n la longueur d'un côté de T_n.
- P_n le périmètre de T_n.
- A_n l'aire de T_n.



1°) Exprimer l'aire d'un triangle équilatéral de côté x en fonction de x.
2°) Quelle est la nature des suites (c_n), (I_n) et (P_n) ? (conjecture ou démonstration lorsque cela est possible)
3°) En remarquant que l'on construit T_{n+1} en construisant sur chaque côté de T_n un triangle équilatéral de côté I_{n+1}, démontrer que $A_{n+1} = A_n + \frac{\sqrt{3}}{12} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n$.
4°) En déduire que $A_n = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{13}}{12}\left[1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right]$ puis réduire cette expression.

Exercice 6

1°) Compléter le tableau suivant en effectuant les calculs avec et sans calculatrice (varier les modèles) sachant que :
$a_1 = \frac{1}{3}$ et pour tout $n \geqslant 1$, $a_{n+1} = 1000\, a_n - 333$. Commentez.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
avec machine	1/3					
sans machine	1/3					

2°) Soit une suite géométrique de raison 0,99 et de premier terme $u_1 = 1$.
a) Sans calculatrice, donner une estimation de u^{100}.
Contrôler votre résultat avec une calculatrice. Commentez
b) Quelle conjecture pouvez–vous faire sur $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$?
c) Quelle conjecture pouvez–vous faire sur $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \ldots$?

Solution exercice 3 : 1°) $\frac{1}{2}$ 2°) -2