Corrigé du devoir A

Exercice 1A

1ère hypothèse

Soit u_n la valeur de l'EGES pour l'année 2006+n.
D'après l'énoncé, (u_n) est une suite arithmétique de raison - 9,3 et de 1er terme $u_0 = 547$.

1°) On applique le cours : pour tout entier n, u_n = "$u_0 + n\times$ raison" = $\boxed{547 - 9{,}3\,n}$.

2°) La valeur de l'EGES en 2051 est $u_{45} = 547 - 45\times 9{,}3 = 128{,}5$

$\frac{547}{4} = 136{,}75$ et comme $119{,}5 < 136{,}75$ alors $\boxed{\text{l'objectif est atteint en 2051}}$.

3°) On cherche le plus petit entier n tel que $u_n < 100 \Leftrightarrow 547 - 9{,}3\,n < 100 \Leftrightarrow n > \frac{100-547}{-9{,}3}$

$\frac{100-547}{-9{,}3} \approx 48{,}06$ donc il faut au moins 49 ans soit en $\boxed{2055}$.

4°) Les valeurs de l'EGES sont 46 termes consécutifs de la suite arithmétique (u_n) donc la valeur cherchée est : $\frac{(547+128{,}5)\times 46}{2} = \boxed{15536{,}5}$

2ème hypothèse

Soit v_n la valeur de l'EGES pour l'année 2006+n.

D'après l'énoncé, (v_n) est une suite géométrique de raison $\left(1-\frac{3{,}1}{100}\right)$ soit 0,969 et de 1er terme $v_0 = 547$.

5°) On applique le cours : pour tout entier n, v_n = "$v_0 \times$ raison^n" = $547\times 0{,}969^n$.
La valeur de l'EGES en 2051 est $v_{45} = 547\times 0{,}969^{45} \approx 132{,}6$

Donc $132{,}6 < \frac{547}{4}$ alors $\boxed{\text{l'objectif est atteint en 2051}}$.

6°) Algorithme

Variables
N : entier
Debut
Mettre 0 dans N
Tant que $547\times 0{,}969^n \leqslant 100$
Mettre N+1 dans N
FinTAnque
Fin

Programme

```
PROGRAM:E
:0→N
:While 547*0.969
^N≥100
:N+1→N
:End
:Disp N
:
```

Mise en œuvre

```
prgmE
                54
              Done
_
```

Il faut donc 54 ans ce qui correspond à $\boxed{\text{l'année 2060}}$.

Exercice 2A

1°)

a) $u_0 = 0$; $u_1 = \frac{1}{5} \times 0 + 4 = 4$; $u_2 = \frac{1}{5} \times 4 + 4 = 4,8$

donc $v_0 = u_0 - 5 = -5$; $v_1 = u_1 - 5 = 4 - 5 = -1$; $v_2 = 4,8 - 5 = -0,2$.

$\frac{v_1}{v_0} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{5} = 0,2$ donc on conjecture que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$.

Validons cette conjecture :

Pour tout entier n :

<u>Méthode 1</u>

On a vu que $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{5} u_n + 4 \\ 5 = \frac{1}{5} \times 5 + 4 \end{cases}$ donc par différence $u_{n+1} - 5 = \frac{1}{5}(u_n - 5)$ donc $v_{n+1} = \frac{1}{5} v_n$ CQFD

<u>Méthode 2</u>

$V_{n+1} = u_{n+1} - 5 = \frac{1}{5} u_n + 4 - 5 = \frac{1}{5} u_n - 1 = \frac{1}{5}(u_n - 5) = \frac{1}{5} v_n$ ...

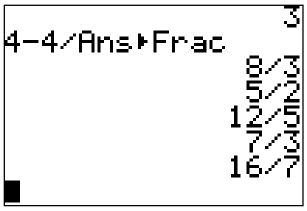
2°) Comme (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de1[er] terme -5 alors $\boxed{v_n = (-5) \times \left(\frac{1}{5}\right)^n}$

et comme $u_n = v_n + 5$ alors $\boxed{u_n = 5 + (-5) \times \left(\frac{1}{5}\right)^n}$

Exercice 3A

1°) $u_2 = \frac{5}{2}$ et $u_5 = \frac{16}{7}$.

$V_0 = \frac{1}{3-2} = 1$ et $v_1 = \frac{1}{\frac{8}{3} - 2} = \frac{3}{2}$



2°) Si la suite (v_n) est arithmétique alors sa raison est $v_1 - v_0 = 0,5$.

Pour tout entier n :

$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1} - 2} - \frac{1}{u_n - 2} = \frac{1}{4 - \frac{4}{u_n} - 2} - \frac{1}{u_n - 2} = \frac{1}{2 - \frac{4}{u_n}} - \frac{1}{u_n - 2} = \frac{u_n}{2u_n - 4} - \frac{1}{u_n - 2} = \frac{u_n - 2}{2(u_n - 2)} = \frac{1}{2}$ CQFD

3°) Come (v_n) est une suite arithmétique alors pour tout entier n : $\boxed{v_n = 1 + \frac{n}{2}}$

Donc $1 + \frac{n}{2} = \frac{1}{u_n - 2}$ donc $\frac{2+n}{2} = \frac{1}{u_n - 2}$ donc $\frac{2}{2+n} = u_n - 2$ donc $u_n = 2 + \frac{2}{2+n} = \boxed{\frac{6+2n}{2+n}}$

Exercice 4A

1°) $u_1 = 0 + 2\times(0+1) = 2$; $u_2 = 2 + 2\times(1+1) = 6$; $u_3 = 6 + 2\times(2+1) = 12$.

2°)

P1 est faux car $u_3 - u_2 \neq u_2 - u_1$.

P2 est faux $\dfrac{u_3}{u_2} \neq \dfrac{u_2}{u_1}$

P3 est faux car $u_2 = 6$ et $6 \neq 2^2 + 1$

P4 est vrai car $u_1 = 2$ et $2 = 1^2+1$

3°)

a) N prend la valeur 3

P prend la valeur 0

K prend la valeur 0 et Pla valeur 0+0 soit 0

Afficher 0

K prend la valeur 1 et P la valeur 0+1 soit 1

Afficher 1

K prend la valeur 2 et P la valeur 1+2 soit 3

Afficher 3

K prend la valeur 3 et P la valeur 3+3 soit 6

Afficher 6

0,1, 3 et 6 ne sont pas les valeurs de $u_{0;}$ u_1; u_2; u_3.

b)

1ère proposition

Début

Variables

N, K et P sont des entiers naturels

Lire N

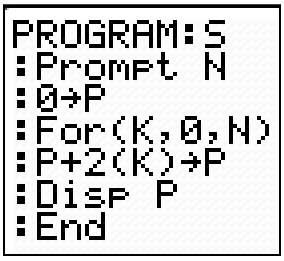
P prend la valeur 0

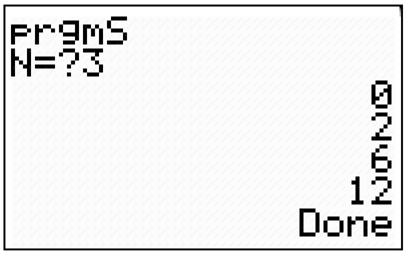
Pour K allant de 0 à N

    Affecter à P la valeur P + 2×k

    Afficher P

Fin Pour





Début

Variables

N, K et P sont des entiers naturels

Lire N

P prend la valeur 0

Afficher P

Pour K allant de 0 à N-1

    Affecter à Pla valeur P + 2 ×(k+1)

    Afficher P

Fin Pour