1SB

Devoir n° 1m

Pour le jeudi 10 septembre

Soit un demi–cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [AB], de centre O et de rayon 1.

On note C le milieu de l'arc $\overset{\frown}{AB}$.

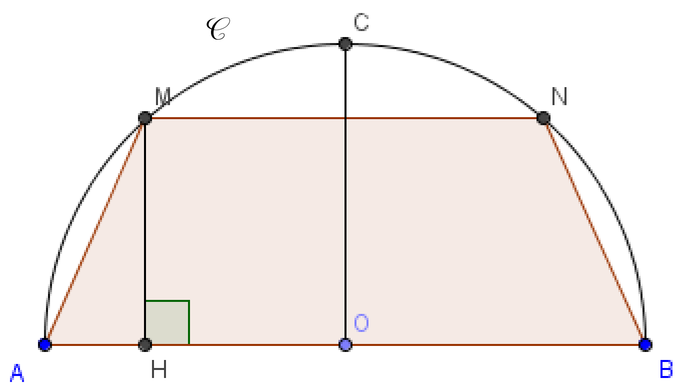
On considère un point M de l'arc $\overset{\frown}{AC}$.

La parallèle à la droite (AB) passant par M recoupe $\mathscr{C}$ au point N.

H est le *projeté orthogonal* du point M sur le segment [AB].

On admet que le polygone AMNB ainsi obtenu est un trapèze isocèle.

Question **: Déterminer la position du point M sur l'arc $\overset{\frown}{AC}$ qui permet d'obtenir le plus grand périmètre pour le trapèze AMNB.**



Dans la production est attendue la réalisation d'une figure dynamique réalisée avec le logiciel Geogebra.
La figure sera enregistrée dans un compte personnel sur le site Geogebra Tube (W/B3) pour chacun des élèves du groupe.

Pour la **présentation**, les mots suivants devront être utilisés :

- Optimisation
- Conjecture
- Substitution
- En fonction de
- Variable
- Forme canonique

Pour la **production écrite**, la figure geogebra sera référencée à l'aide d'un QR code (W/C4).

Version longue :

1°) Justifier que : $x \in [0 ; \sqrt{2}]$.

x prend toutes les valeurs de l'intervalle [AA; AC] Comme AA = 0, il suffit donc de prouver que : **AC = $\sqrt{2}$**

C étant au milieu de l'arc $\overset{\frown}{AB}$, C est donc équidistant de A et B , toute comme O, milieu de [AB].
On en déduit : (OC) est la médiatrice de [AB] et donc : **AOC est un triangle rectangle en O (I)**
C étant un point du demi-cercle Γ **, on a : OC = OA = 1 (II)**
Avec (I), (II) et le théorème de Pythagore appliqué dans le triangle AOC, on en déduit : $\sqrt{AO^2 + OC^2}$ = **AC = $\sqrt{2}$** CQFD

2°) Soit H le projeté orthogonal de M sur [AB]

a) Prouver que : $AM^2 - BM^2 = AH^2 - HB^2$

Par définition de H, pour toute position de M où <u>$M \neq A$,</u> les triangles AHM et BHM sont rectangles en H.
En appliquant alors le théorème de Pythagore dans ces triangles, on a alors :

$AM^2 - AH^2 = HM^2$ et $BM^2 - BH^2 = HM^2$

d'où : $AM^2 - AH^2 = BM^2 - BH^2$

d'où : $AM^2 - BM^2 = AH^2 - HB^2$.

<u>Pour M en A</u>, on a H = A et donc :
$AM^2 - BM^2 = 0 - BA^2 = AH^2 - AB^2 = AH^2 - HB^2$.

L'égalité est donc vérifiée pour toute position de M sur $\overset{\frown}{AC}$. CQFD

b) Prouvez que $BM^2 = 4 - AM^2$

Lorsque le point M est un point de l'arc $\overset{\frown}{AC}$, c'est aussi un point du cercle de diamètre [AB].
<u>Par conséquent pour $M \neq A$</u>, le triangle (AMB) est rectangle en M d'où par le théorème de Pythagore:

$AM^2 + BM^2 = AB^2$

Comme le rayon du cercle est égal à 1, on a : AB = 2 d'où $AB^2 = 4$. Ainsi : $BM^2 = AB^2 - AM^2 = 4 - AM^2$.
<u>Pour M en A</u>, on a : $AM^2 = 0$; $BM^2 = BA^2 = 4$ d'où : $BM^2 = 4 - AM^2$.

L'égalité demandée est donc réalisée pour tout position de M sur l'arc $\overset{\frown}{AC}$ CQFD .

c) Déduire des questions précédentes que : AH = $\frac{x^2}{2}$.

Avec les réponses aux questions 2a) et 2b):

$AH^2 = AM^2 - BM^2 + HB^2 = AM^2 - [4 - AM^2] + HB^2$

soit $AH^2 = x^2 - [4 - x^2] + [AB - AH]^2 = x^2 - 4 + x^2 + [4 - 2 \times 2 \times AH + AH^2]$

soit $4\,AH = 2x^2$ donc $AH = \frac{x^2}{2}$ CQFD

3°) On admet que le trapèze AMNB est toujours isocèle (i.e. : AM = NB)
Prouvez que le périmètre p(x) du trapèze est : $-x^2 + 2x + 4$

On a : p(x) = AB + AM + MN + NB .
AMNB étant par hypothèse un trapèze isocèle : AM = NB = x (isocèle)
et $MN = AB - 2 \times AH$. (trapèze)

On en déduit : $p(x) = 2 + x + [2 - 2\frac{x^2}{2}] + x = -x^2 + 2x + 4$ CQFD .

4°) A l'aide de la notion de forme canonique, déterminer la position de M qui donne le plus grand périmètre du trapèze AMNB.

$p(x) = -(x^2 - 2x) + 4 = -[(x-1)^2 - 1^2] + 4 = = \boxed{-(x-1)^2 + 5}$ donc pour tout réel x de $[0 ; \sqrt{2}]$, $p(x) \leqslant 5 = p(1)$.
Le plus grand périmètre est donc obtenu pour : $\boxed{x = AM = 1}$.

Si AM = 1, alors NB = 1 (trapèze isocèle) et : $MN = AB - 2 \times AH = 2 - 2 \times \frac{1^2}{2} = 1$.

Ce trapèze a alors trois côtés de même longueur, le quatrième ayant une longueur double des précédents.