

OLYMPIADES 4

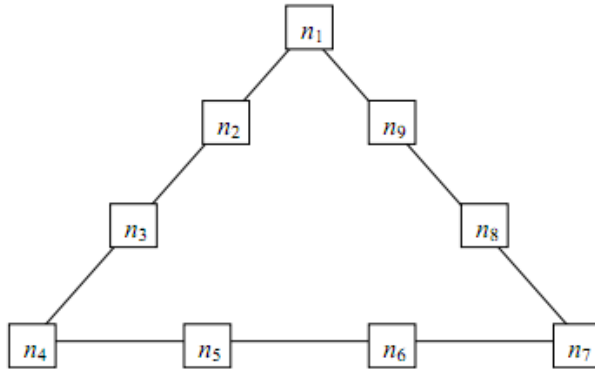
Partie A : Questions préliminaires :

On considère trois entiers deux à deux distincts et compris entre 1 et 9.

- 1- Quelle est la plus petite valeur possible pour leur somme ?
- 2- Quelle la plus grande valeur possible pour leur somme ?

Partie B : Les triangles magiques :

On place **tous les nombres entiers de 1 à 9** dans les neuf cases situées sur le pourtour d'un triangle, comme indiqué sur la figure ci-dessous.

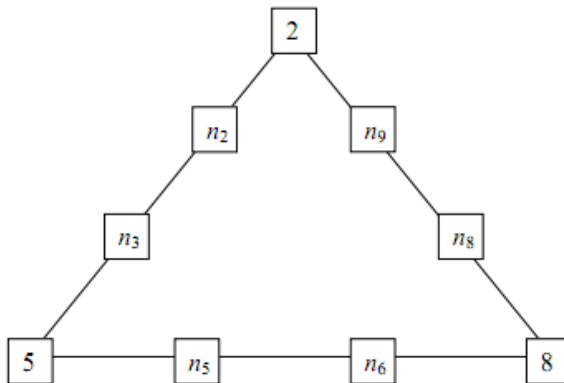


Si les sommes des quatre nombres situés sur chacun des trois côtés du triangle ont la même valeur S , on dit que le triangle est S -magique.

(C'est à dire si : $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n_4 + n_5 + n_6 + n_7 = n_7 + n_8 + n_9 + n_1 = S$)

On se propose de déterminer toutes les valeurs possibles de S .

- 1- Compléter le triangle suivant de sorte qu'il soit 20-magique, c'est-à-dire S -magique de somme $S = 20$.



- 2- On considère un triangle S -magique et on appelle T la somme des nombres placés sur les trois sommets.
 - a. Prouver qu'on a $45 + T = 3S$.
 - b. En déduire qu'on a $17 \leq S \leq 23$
 - c. Donner la liste des couples (S, T) ainsi envisageables.
- 3- Proposer un triangle 17-magique.
- 4- Prouver qu'il n'existe pas de triangle 18-magique.
- 5-
 - a. Montrer que dans un triangle 19-magique, 7 est nécessairement situé sur un sommet du triangle.
 - b. Proposer un triangle 19-magique.
- 6- Prouver que, s'il existe un triangle S -magique, alors il existe aussi un triangle $(40 - S)$ -magique.
- 7- Pour quelles valeurs de S existe-t-il au moins un triangle S -magique ?

Éléments de correction :

Exercice 1 :

Partie A

- 1- Plus petite valeur : 6 (=1 + 2 + 3)
- 2- Plus grande valeur : 24 (= 7 + 8 + 9)

Partie B :

1- Triangle 20-magique :

$$\begin{array}{cccc} & & 2 & & \\ & & 7 & 1 & \\ & 6 & & 9 & \\ 5 & 3 & 4 & 8 & \end{array}$$

2- a. $3S = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7 + n_7 + n_8 + n_9 + n_1 = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+T$

b. $\frac{6+45}{3} \leq S \leq \frac{24+45}{3}$ (cf. partie A)

c. (17,6) (18,9) (19,12) (20,15) (21,18) (22,21) (23,24)

3- Triangle 17-magique :

$$\begin{array}{cccc} & & 1 & & \\ & & 8 & 4 & \\ & 6 & & 9 & \\ 2 & 5 & 7 & 3 & \end{array}$$

4- Supposons qu'un tel triangle existe, alors $T = n_1 + n_4 + n_7 = 9$.

Aucun des trois nombres n_1, n_4, n_7 n'est 9. 9 serait donc un des six autres nombres.

Considérons le côté du triangle sur lequel se situe le nombre 9. On peut supposer par exemple que $n_2 = 9$. On aurait alors, $S = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 18$, d'où

$n_1 + n_3 + n_4 = 9$. Or, $T = n_1 + n_4 + n_7 = 9$. Par suite, $n_3 = n_7$, ce qui est exclu.

Il n'existe donc pas de triangle magique tel que $S = 18$.

(On peut aussi envisager toutes les possibilités.)

5- a. Supposons qu'un tel triangle existe, alors $T = n_1 + n_4 + n_7 = 12$.

Supposons que 7 ne soit pas sur l'un des sommets et considérons le côté du triangle sur lequel se situe le nombre 7. On peut supposer par exemple que $n_2 = 7$. On aurait alors,

$S = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 19$, d'où $n_1 + n_3 + n_4 = 12$. Or, $T = n_1 + n_4 + n_7 = 12$. Par suite, $n_3 = n_7$, ce qui est exclu.

7 est donc nécessairement situé sur l'un des sommets du triangle.

b. Triangle 19-magique

$$\begin{array}{cccc} & & 7 & & \\ & & 4 & 1 & \\ & 5 & & 9 & \\ 3 & 8 & 6 & 2 & \end{array}$$

6- Il suffit de remplacer chaque n_i par $10 - n_i$; les sommes sont alors remplacées par $40 - S$ et les $10 - n_i$ sont deux à deux distincts et compris entre 1 et 9.

7- Les valeurs de S pour lesquelles on peut trouver un triangle S -magique sont : 17, 19, 20 (trouvées dans les questions précédentes) et 23, 21 (d'après la question précédente).
Il n'y a pas de triangle 18-magique, et donc pas non plus de triangle 22-magique.