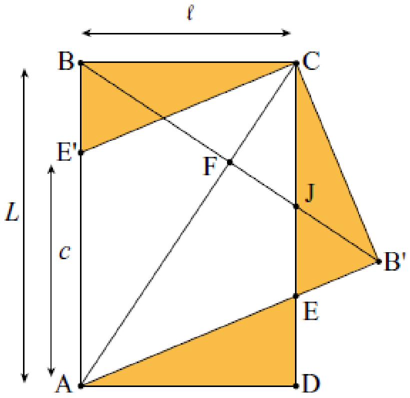
OLYMPIADES 5

Problème 1

1. Construction du losange à partir d'une feuille rectangulaire $L = 16\ cm$, $\ell = 8\ cm$.



2. Sachant que AE'CE est un losange, on a $(16-c)^2 + 8^2 = c^2$ soit $c = 10$.

3. On a nécessairement :
$(L - 7,5)^2 + \ell^2 = 7,5^2$ avec $L \geqslant 8$, soit $\ell^2 = L(15 - L)$.
D'où les seules réponses entières : $L = 12$ et $\ell = 6$. Et ces deux dimensions conduisent à un losange de côté 7,5 cm.

4. Sachant que AE'CE est un losange, on a $ED = E'B$ donc les triangles BCE' et AED sont isométriques. La somme de leurs aires est égale à 25 % de l'aire du rectangle.
D'où l'égalité : $(L - c)\ell = 0,25L\ell$ d'où $c = 0,75L$.

5. Le pliage correspond à une symétrie axiale d'axe (AC).
Notons B' l'image de B et E l'intersection de (AB') et (CD) (qui sont sécantes) et E' le symétrique de E (E' est sur (AB) car CBE' est un triangle rectangle image de CB'E).
La symétrie assure les égalités de longueurs $CE' = CE$ et $AE = AE'$.
On conclut avec le parallélisme de (CE) et (AE').

Problème 2

1. Par Thalès, $\dfrac{AK}{GH} = \dfrac{BA}{BG} = \dfrac{a}{b+a}$.
Par construction, $GH = AG = b$ d'où $AK = \dfrac{ab}{b+a}$
et aire(ABK)$= \dfrac{AB \times AK}{2} = \dfrac{a^2b}{2(b+a)}$

2. De même $\dfrac{JA}{EF} = \dfrac{b}{a+b}$ et $JA = \dfrac{ab}{a+b}$
d'où aire(JAC)$= \dfrac{JA \times AC}{2} = \dfrac{ab^2}{2(a+b)}$

et aire(BJC) = aire(ABC) - aire(JAC)
$= \dfrac{ab}{2} - \dfrac{ab^2}{2(a+b)} = \dfrac{a^2b}{2(a+b)}$

Donc aire(BJC) = aire(ABK)

et donc aire(IBC) = aire(JBC) - aire(JBI)
= aire(ABK) - aire(JBI)
= aire(AJIK).

Source : APMEP