OLYMPIADES 6 : Eléments de solution

Problème 1 (série S)

1. Les six nombres admissibles en trois étapes sont :

le nombre 1 : $5 \xrightarrow{R} 2 \xrightarrow{M} 4 \xrightarrow{R} 1$
le nombre 8 : $5 \xrightarrow{R} 2 \xrightarrow{M} 4 \xrightarrow{M} 8$
le nombre 4 : $5 \xrightarrow{M} 10 \xrightarrow{R} 7 \xrightarrow{R} 4$
le nombre 14 : $5 \xrightarrow{M} 10 \xrightarrow{R} 7 \xrightarrow{M} 14$
le nombre 17 : $5 \xrightarrow{M} 10 \xrightarrow{M} 20 \xrightarrow{R} 17$
le nombre 40 : $5 \xrightarrow{M} 10 \xrightarrow{M} 20 \xrightarrow{M} 40$

Le raisonnement précédent laisse apparaitre aussi les nombres admissibles en 0 étapes (5), une étape (2 ; 10) et deux étapes (4 ; 7 ; 20).
Les onze nombres admissibles en moins de 4 étapes sont donc :

1 - 2 - 4 - 5 - 7 - 8 - 10 - 14 - 17 - 20 - 40

2. Les deux chemins suivants donnent la réponse :

$5 \xrightarrow{R} 2 \xrightarrow{M} 4 \xrightarrow{M} 8 \xrightarrow{M} 16 \xrightarrow{R} 13$
$5 \xrightarrow{M} 10 \xrightarrow{R} 7 \xrightarrow{M} 14 \xrightarrow{R} 11 \xrightarrow{M} 22 \xrightarrow{R} 19$

3. Les nombres divisibles par trois ne sont pas accessibles car :

- 5 n'est pas divisible par 3 ;
- en multipliant par 2 un nombre non divisible par 3, on obtient un nombre non divisible par 3 ;
- En retranchant 3 à un nombre non divisible par 3, on obtient un nombre non divisible par 3.

Ainsi, partant d'un nombre non divisible par 3, on ne trouvera sur son chemin (et donc au final) aucun nombre divisible par 3.

4. Un chemin menant de 5 à 2009 :

$$5 \xrightarrow{R} 2 \xrightarrow{M} 4 \xrightarrow{M} 8 \xrightarrow{M} 16 \xrightarrow{M} 32 \xrightarrow{M} 64 \xrightarrow{M} 128$$
$$\xrightarrow{M} 256 \xrightarrow{R} 253 \xrightarrow{M} 506 \xrightarrow{R} 503$$
$$\xrightarrow{M} 1006 \xrightarrow{M} 2012 \xrightarrow{R} 2009.$$

Ce chemin a été trouvé par l'algorithme ci-dessous :

Algorithme de création de chemin :

On crée en fait le chemin inverse : en partant de N, on obtient un chemin qui mène à 5 de la manière suivante :

★ Si n est divisible par 2, son prédécesseur (père) est $n/2$.
L'opérateur est le réciproque de (M) : $n \xrightarrow{D} n/2$

★ Sinon, son prédécesseur est $n + 3$.
L'opérateur est le réciproque de (R) : $n \xrightarrow{A} n + 3$.

Ainsi, pour 2009, on obtient successivement :

2009 - 2012 - 1006 - 503 - 506 - 253 - … - 16 - 8 - 4 - 2 - 5.

Problème 2 (série S)

A. 1. Trivialement 2 et 2.

2. $xy = 2009$ implique que x et y sont des entiers impairs. Mais alors $x+y$ est un entier pair et par conséquent $x + y \neq 2009$. On ne peut pas trouver deux entiers naturels dont la somme et le prpoduit soient égaux à 2009.

3. Soit x et y deux entiers naturels non nuls tels que $0 < x \leqslant y$.
Si $x \leqslant y$ alors $x + y \leqslant 2y$. Et comme $x + y = xy$ alors $xy \leqslant 2y$ alors $x \leqslant 2$ puisque y n'est pas nul.
Soit $x = 1$. Alors $x + y = xy$ s'écrit $1 + y = y$. On ne peut pas trouver y.
Soit $x = 2$. Alors $x + y = xy$ s'écrit $2 + y = 2y$ donc $y = 2$.
Le seul couple possible est $(\mathbf{2}\ ,\ \mathbf{2})$

B. 1. Soit x, y, et z trois entiers naturels non nuls tels que $0 < x \leqslant y \leqslant z$.
Si $x \leqslant y \leqslant z$ alors $x + y + z \leqslant 3z$. Et comme $x + y + z = xyz$ alors $xy \leqslant 3$ car $z \neq 0$.

2. $xy \leqslant 3$ donne :
Soit $x = y = 1$. Alors $x + y + z = xyz$ s'écrit $2 + z = z$. On ne peut pas trouver z.
Soit $x = 1$ et $y = 2$. Alors $x + y + z = xyz$ s'écrit $3 + z = 2z$. Donc $z = 3$.
Soit $x = 1$ et $y = 3$. Alors $x + y + z = xyz$ s'écrit $4 + z = 3z$. On ne peut pas trouver $z \geqslant y$.
Le seul triplet possible est $(\mathbf{1}\ ,\ \mathbf{2}\ ,\ \mathbf{3})$.

C. 1. Soit x, y, z, u et v cinq entiers naturels non nuls tels que $0 < x \leqslant y \leqslant z \leqslant u \leqslant v$.
Un raisonnement analogue à celui utilisé dans la question B conduit à :
Si $x \leqslant y \leqslant z \leqslant u \leqslant v$ alors $x + y + z + u + v \leqslant 5v$.
Et comme $x + y + z + u + v = xyzuv$ alors $xyzuv \leqslant 5v$, alors $xyzu \leqslant 5$ puisque v n'est pas nul.
On en déduit déjà que $x = y = 1$. Examinons les différents cas possibles.
Soit $z = 1$ et $u = 1$. Alors $x + y + z + u + v = xyzuv$ s'écrit $4 + v = v$. On ne peut pas trouver v.
Soit $z = 1$ et $u = 2$ Alors $x + y + z + u + v = xyzuv$ s'écrit $5 + v = 2v$ et $v = 5$.
Soit $z = 1$ et $u = 3$.Alors $x + y + z + u + v = xyzuv$ s'écrit $6 + v = 3v$ et $v = 3$.
Soit $z = 1$ et $u = 4$. Alors $x + y + z + u + v = xyzuv$ s'écrit $7 + v = 4v$. On ne peut pas trouver v.
Soit $z = 1$ et $u = 5$. Alors $x + y + z + u + v = xyzuv$ s'écrit $8 + v = 5v$ et $v = 2$.
Soit $z = 2$ et $u = 2$.Alors $x + y + z + u + v = xyzuv$ s'écrit $6 + v = 4v$ et $v = 2$.
Les seuls quintuplets possibles sont
$(\mathbf{1, 1, 1, 2, 5})$, $(\mathbf{1, 1, 1, 3, 3})$, $(\mathbf{1, 1, 2, 2, 2})$