Correction du devoir 14S

Exercice 1

Pour $h \neq 0$, $\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{\frac{1}{1+h}-1}{h} = \frac{\frac{1-(1+h)}{(1+h)}}{h} = \frac{\frac{-h}{(1+h)}}{h} = \frac{-h}{h(1+h)} = -\frac{1}{1+h}$

Quand h est proche de 0, h est négligeable devant 1 donc 1+h tend vers 1.

On en déduit que $\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} -\frac{1}{1+h} = -\frac{1}{1} = -1$ donc $f'(1) = -1$ CQFD

Exercice 2

Pour tracer une tangente en un point d'abscisse a, il suffit de connaître $f'(a)$.

f est une fonction polynôme donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $f(x) = -x^2 + \frac{3}{2}x + 1$ donc $f'(x) = -2x + \frac{3}{2}$ donc $f'(0) = \frac{3}{2}$ et $f'(2) = -2 \times 2 + \frac{3}{2} = -\frac{5}{2}$.

On trace alors les tangentes en complétant le graphique avec quelques éléments d'appui pour le correcteur : voir dernière page.

Exercice 3

1°)

Deux images : f(0) = –2 et f(1) = –4.

Deux nombres dérivés :

- $f'(0) = 0$ car la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est horizontale (donc de coefficient directeur nul)
- $f'(1) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{+3}{-1} = -3$

2°) On raisonne par « double expression » :

$f(0) = -2$ et $f(0) = a \times 0^3 + b \times 0^2 + c \times 0 + d = d$ donc d = –2.

f est une fonction polynôme donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f'(0) = 0$ et $f'(0) = 3a \times 0^2 + 2b \times 0 + c = c$ donc c = 0.

On poursuit donc avec $f(x) = ax^3 + bx^2 - 2$ et $f'(x) = 3ax^2 + 2bx$.

$f(1) = -4$ et $f(1) = a + b - 2$ donc $a + b - 2 = -4$ donc $a + b = -2$.

$f'(1) = -3$ et $f'(1) = 3a + 2b$ donc $3a + 2b = -3$.

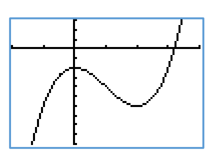
a et b sont donc solutions du système $\begin{cases} a + b = -2 \\ 3a + 2b = -3 \end{cases}$.

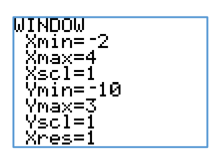
En multipliant la 1ère égalité par (–3) et en l'ajoutant membre à membre à la deuxième, on obtient :

$3a + 2b - 3a - 3b = -3 + 6$ donc $-b = 3$ donc b = –3.

De $a + b = -2$, on obtient alors : $a = -b - 2 = 3 - 2$ donc $a = 1$.

Finalement, pour tout réel x, $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2$.





Exercice 4

1°)

a) Une équation de T est donnée par la formule du cours : « $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ ».

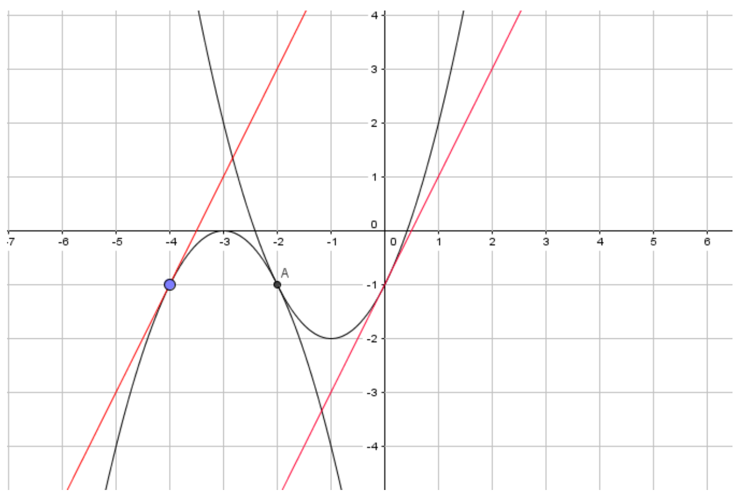
Ici $a = 0$, donc la formule donne :

$y = f'(0)(x-0) + f(0)$ avec $f(0) = 0^2 + 2 \times 0 - 1 = -1$

et comme pour tout réel x, $f'(x) = 2x + 2$ alors $f'(x) = 2 \times 0 + 2 = 2$

donc $y = 2x - 1$ est une équation de T.

b) Pour tout réel x, $g'(x) = -2x - 6$.
Pour que la tangente au point cherché soit parallèle à T, il suffit que les coefficients directeurs de ces droites soient identiques.
On résout donc l'équation (E) : $g'(x) = 2 \Leftrightarrow -2x - 6 = 2 \Leftrightarrow x = \frac{6+2}{-2} = -4$
donc la tangente au point d'abscisse 2 de $\mathscr{P}_2$ est parallèle à T.



2°)

a) Les points communs des deux paraboles sont les points d'abscisse x solution de l'équation (E) : $f(x) = g(x)$.
(E) $\Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = -x^2 - 6x - 9 \Leftrightarrow 2x^2 + 8x + 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$.
Pour $x = -2, f(x) = f(-2) = (-2)^2 + 2 \times (-2) - 1 = 4 - 4 - 1 = -1 = g(-2)$.
Les deux courbes n'ont donc que le point A(–2 ;–1) en commun.

b) Une droite est parfaitement déterminée par un point et son coefficient directeur.
Comme les deux tangentes passent par A, il suffit donc de montrer que $g'(x_A) = f'(x_A)$ avec $x_A = -2$.
Pour tout réel x, $f'(x) = 2x + 2$ donc $f'(-2) = 2 \times (-2) + 2 = -2$
et $g'(x) = -2x - 6$ donc $g'(-2) = (-2) \times (-2) - 6 = -2$.
On a donc bien $g'(-2) = f'(-2)$. CQFD

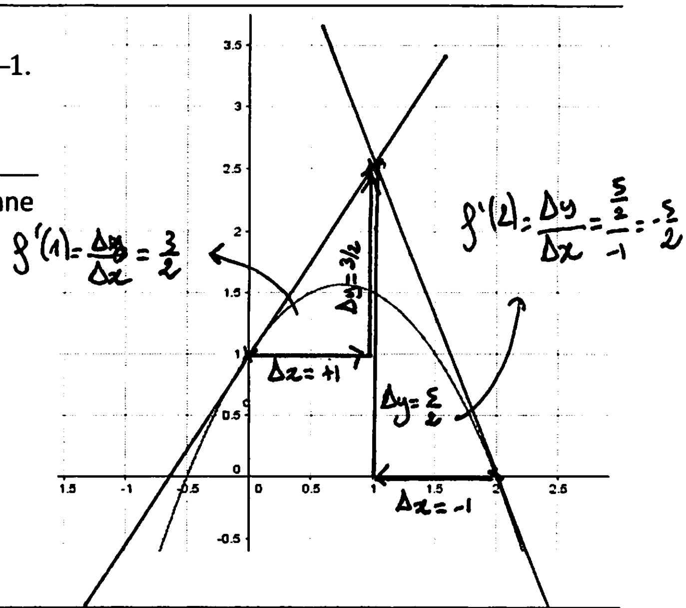
c) En procédant comme en 1a, on montre qu'une équation de D est : $y = -2x - 5$

Il suffit de montrer que pour tout réel x, on a : $f(x) - (-2x - 5) \geqslant 0$.
$f(x) - (-2x - 5) = x^2 + 2x - 1 - (-2x - 5) = x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$
et comme tout carré est positif alors $f(x) - (-2x - 5) \geqslant 0$. CQFD

1ère S	Devoir n° 14S *Nombres dérivés*	Jeudi 28 janvier

Exercice 1 (4 points)

Notons f la fonction inverse.
A l'aide de la notion de taux d'accroissement, montrer que $f\,'(1) = -1$.



Exercice 2 (3 points)

Soit f la fonction définie par $f(x) = -x^2 + \frac{3}{2}x + 1$ dont on donne ci–contre une représentation graphique notée $\mathscr{C}$.
Tracer les tangentes à $\mathscr{C}$ aux points d'abscisse 0 et 2.
(bien justifier votre méthode)

Exercice 3 (7 = 3 + 1 + 1,5 + 1,5 points)

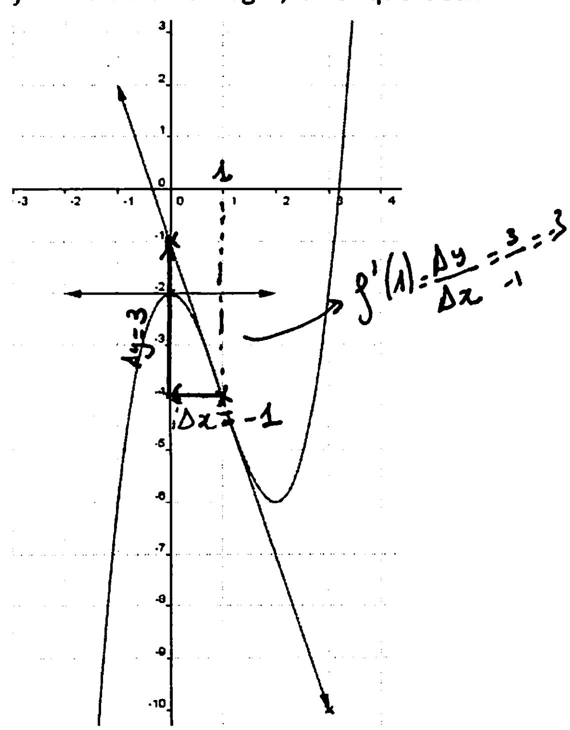
On donne ci–contre la représentation graphique $\mathscr{C}$ d'une fonction polynôme f du troisième degré, ainsi que deux tangentes à $\mathscr{C}$.

1°) A l'aide du graphique, lire deux nombres dérivés et les images de 0 et 1.

2°) On sait qu'il existe quatre réels a, b, c et d tels que :

$$\text{pour tout réel x} : f(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d.$$

Déterminer d puis c puis a et b.



Exercice 4 (6 = 1,5 + 1,5 + 1 + 1 + 1 points)

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 1$ et $g(x) = -x^2 - 6x - 9$.

Soit $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ leurs représentations graphiques respectives.

1°) Soit T la tangente à $\mathscr{P}_1$ au point d'abscisse 0.

a) Déterminer une équation de T.
b) Déterminer le point de $\mathscr{P}_2$ dont la tangente est parallèle à T.

2°)

a) Démontrer que $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ ont un seul point commun qu'on notera A.
b) Démontrer que $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ admettent en A la même tangente D.
c) Démontrer que $\mathscr{P}_1$ est au dessus de D