Corrigé du devoir 2S

Exercice 1

1°) Soit (E) cette équation.
$x^2 - 4x - 14$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 1, b = -4$ et $c = -14$
donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4\times1\times(-14) = 16 + 56 = 72$
Comme $\Delta > 0$ alors l'équation (E) admet deux solutions distinctes :
$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4+\sqrt{72}}{2} = \frac{4-\sqrt{6^2\times2}}{2} = \frac{4-6\sqrt{2}}{2} = \frac{2(2-3\sqrt{2})}{2} = 2 - 3\sqrt{2} = -(3\sqrt{2} - 2)$
et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = 2 + 3\sqrt{2} = 3\sqrt{2} + 2$
On retrouve donc bien les résultats de la calculatrice. CQFD

2°) Une difficulté constante avec les calculatrices provient du fait que l'écriture d'un nombre réel n'est pas **unique.**
(c'est ainsi que l'on peut parfois trouver des résultats qui, en première lecture, peuvent sembler différents de ceux qu'on obtient par le calcul).

3°) Comme a >0 alors la parabole d'équation $y = x^2 - 4x - 14$ est tournée vers le haut
donc, avec le cours, on en déduit le tableau de signes de $x^2 - 4x - 14$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x^2 - 4x - 14$		+	0	$-$	0	+	

donc en désignant par S l'ensemble solution de l'inéquation, on a : $\boxed{\mathbf{S} =]-\infty; \boldsymbol{x_1}] \cup [\boldsymbol{x_2}; +\infty[}$

Exercice 2

1°) Comme le trinôme est écrit sous sa forme canonique « $a(x-\alpha)^2 + \beta$ »
alors on en déduit que $a > 0$ et $\beta < 0$
donc, d'après le cours, la parabole représentant le trinôme coupe deux fois l'axe des abscisses
dont la proposition est **vraie**.
2°) Posons $f(x) = 2x^2 + 4x + 5$
$f(x)$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 2, b = 4$ et $c = 5$.
Sa forme canonique est $a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a} = -1$ et $\beta = f(\alpha) = f(-1) = 2(-1)^2 + 4\times(-1) + 5 = 3$.
donc le sommet de la parabole est le point de coordonnées $(\alpha; \beta)$ soit $(-1\,;3)$ donc la proposition est **vraie**.
3°) Comme $f(x) = 2(x+1)(x-3)$
alors $f(x)$ a pour racines -1 et 3
donc f atteint son <u>maximum</u> en $\frac{-1+3}{2}$ soit en 1
donc la proposition est **fausse.** **(**plus simplement, comme « a>0 » alors f admet un minimum et non un maximum)
4°) Comme le trinôme est écrit sous sa forme canonique « $a(x-\alpha)^2 + \beta$ »
alors on en déduit que son minimum est $\beta = 16$ et que $a > 0$
donc son minimum est positif et la parabole d'équation y = $(x+1)^2$+16 est tournée vers le haut
donc le trinôme est sans racine donc la proposition est **fausse.**
<u>Méthode 2</u> :
Déterminer les racines du trinôme c'est comme résoudre l'équation $(x+1)^2+16 = 0$
or : $(x+1)^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = -16$ et un carré n'est jamais négatif
donc le trinôme est sans racine
donc la proposition est **fausse.**
5°) Les abscisses des points d'intersection des deux courbes sont les solutions de l'équation $x^2+1 = -2x$.
or : $x^2+1=-2x \Leftrightarrow x^2+2x+1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$
donc la droite et la parabole ne se coupent qu'en un seul point
donc la proposition est **fausse**.

Exercice 3

1°) $p(x) = -3(x-1)^2 + 12$

2°) $t(x) = -(x+5)(x+2)$

3°) $\Delta < 0$

4°)

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$q(x)$		+	0	+	

Exercice 4

$(I_2) \Leftrightarrow x^2-7x > 0 \Leftrightarrow x(x-7) > 0$

- x^2-7x peut s'écrire sous la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$ donc $a > 0$ donc la parabole d'équation $y = x^2-7x$ est « tournée vers le haut »
- $x(x-7)$ est un trinôme du second degré dont les racines sont 0 et 7

Par application du cours, on en déduit son tableau de signes :

x	$-\infty$		0		7		$+\infty$
q(x)		+	0	–	0	+	

Soit S l'ensemble solution de (I_2) alors **S =** $]-\infty;\mathbf{0}[\cup]\mathbf{7};+\infty[$

$(E_3) \Leftrightarrow 9-x^2 = 25 \Leftrightarrow x^2 = -16$

Comme un carré est toujours positif alors (E_3) est sans solution.

Soit S l'ensemble solution de (E_3) alors **S = ∅.**

$(E_4) \Leftrightarrow x+1 = \sqrt{25}$ ou $x+1 = -\sqrt{25} \Leftrightarrow x = 5-1 = 4$ ou $x = -5-1 = -6$

Soit S l'ensemble solution de (E_4) alors **S = {–6 ;4}**

Exercice 5

Voir DEFIBAC exercice 21 page 18

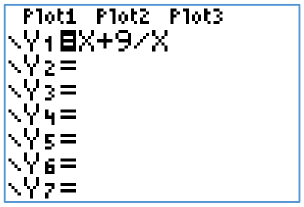
Exercice 6

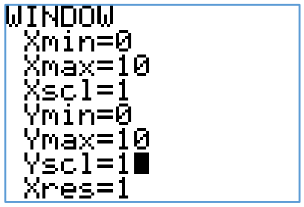
Lire	x et y		
Si	$\mathbf{0 \leqslant x \leqslant 1}$ ***et*** $\boldsymbol{x^2 \leqslant y \leqslant \sqrt{(x)}}$	alors	afficher **« A appartient à la zone grisé »**
		sinon	**afficher « A n'appartient pas à la zone grisé »**
Fin Si			

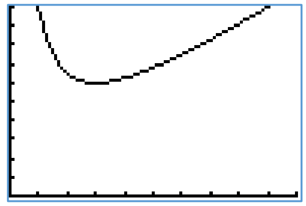
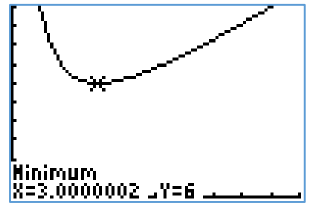
Exercice 7

On raisonne par **analyse et synthèse.**

Avec une calculatrice, on conjecture que le point solution a pour coordonnées (3 ; 6).





Pour valider la conjecture, **il suffit** de vérifier que :

1. pour tout réel x> 0, on a : $x+\frac{9}{x}\geqslant 6$
2. le point de coordonnées (3 ;6) appartient à la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y=x+\frac{9}{x}$.

<u>Preuve de 1</u>. :

$x+\frac{9}{x}\geqslant 6 \Leftrightarrow \frac{x^2+9}{x}-6\geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+9-6x}{x}\geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(x-3)^2}{x}\geqslant 0.$

Comme tout carré est positif et x > 0 alors pour tout réel x > 0, on a donc bien $\frac{(x-3)^2}{x}\geqslant 0$ donc $x+\frac{9}{x}\geqslant 6$ **CQFD**

<u>Preuve de 2</u>. :

Pour $x = 3$, $x+\frac{9}{x}=3+\frac{9}{3}=3+3=6$ donc le point de coordonnées (3 ; 6) appartient bien à la courbe $\mathscr{C}$. **CQFD**