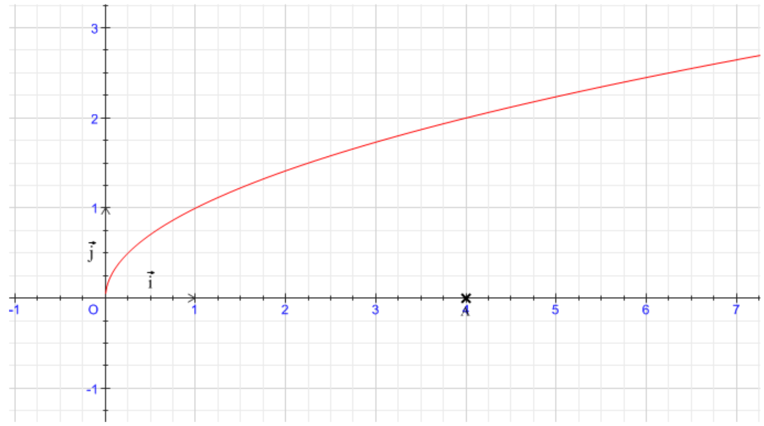
Corrigé du devoir 3m, exercice 1

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on a tracé ci–contre la courbe Γ qui représente la fonction racine carrée .
Soit le point A (4;0), déterminer les coordonnées d'un point de Γ pour lequel la distance au point A est minimale.



Solution

□ **Chercher (s’approprier l’exercice, conjecturer)**

Voir : http://tube.geogebra.org/m/ggCIMBkO

□ **Modéliser**

(toute la partie ci–dessous en gras peut être réservé ultérieurement)

Soit M(x ;y) un point de Γ.
Comme on est en repère orthonormé alors $AM = \sqrt{(x-x_A)^2+(y-y_A)^2} = \sqrt{(x-4)^2+y^2}$
or si M est un point de Γ alors on a $y=\sqrt{x}$
donc $AM = \sqrt{(x-4)^2+\left(\sqrt{x}\right)^2} = \sqrt{x^2-8x+16+x} = \sqrt{x^2-7x+16}$
On cherche donc le minimum de $\sqrt{x^2-7x+16}$ pour x réel positif.

□ **Calculer, raisonner, communiquer**

La forme canonique de $x^2-7x+16$ est $\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{49}{4}+16$ soit $\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{15}{4}$ (tout autre méthode acceptée)
donc la fonction f : x $\mapsto \left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{15}{4}$ *admet un minimum en* $x=\frac{7}{2}$ *égal à* $\frac{15}{4}$
donc pour tout réel x , $\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{15}{4} \geqslant \frac{15}{4}$
donc pour tout réel x ⩾0, $\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{15}{4} \geqslant \frac{15}{4}$
or la fonction racine carrée est croissante sur [0 ;+∞[
donc $\sqrt{\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{15}{4}} \geqslant \sqrt{\frac{15}{4}}$
donc AM $\geqslant \sqrt{\frac{15}{4}}$ et AM = $\sqrt{\frac{15}{4}}$ pour x = $\frac{7}{2}$

donc le point $\boxed{M\left(\frac{7}{2};\sqrt{\frac{7}{2}}\right)}$ est une solution du problème **(c’est même le seul point solution).**