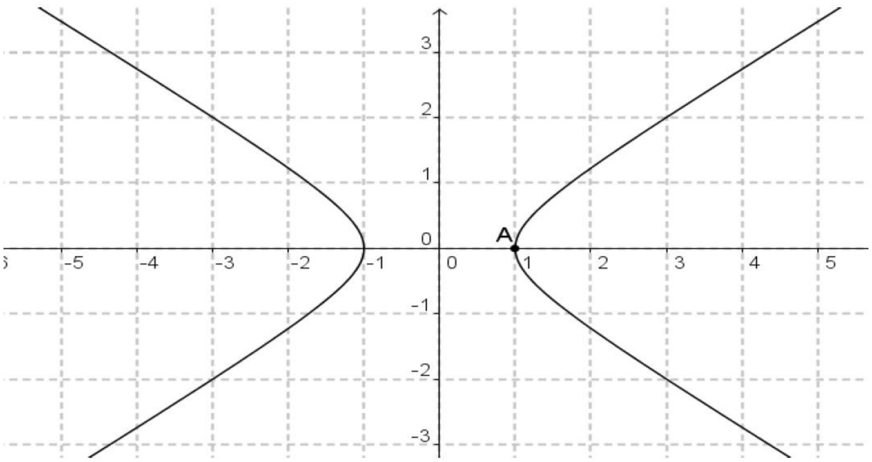
Corrigé du devoir 3m, exercice 3

On a représenté ci-dessous la courbe Γ, ensemble des points M(x ;y) vérifiant la relation $x^2-2y^2=1$.
On dit qu'un point est formidable s'il est sur Γ et si ses coordonnées sont entières. Par exemple, le point A(1 ;0) est un point formidable.



Soit a et b les coordonnées d'un point formidable. On pose C = a + 2b et D = a + b.

1°) Exprimer $C^2 - 2D^2$ en fonction de $a^2 - 2b^2$.

2°) En déduire deux autres points formidables d'abscisse x > 10.

3°) Rédiger un algorithme qui affiche le premier point formidable d'abscisse strictement supérieure à 2015.

Solution

1°) $C^2 - 2D^2 = (a+2b)^2-2(a+b)^2 = \ldots = -(a^2-2b^2)$
2°)

- Si le point de coordonnées (a,b) est un point formidable
  alors avec 1°) $a^2 - 2b^2 = 1$ et $C^2-2D^2 = -1$
  donc en posant E = C+2D et F = C+D, on a $E^2-2D = -(C^2-2D^2) = -(-1) = 1$
  donc le coupe (E ;F) correspond aux coordonnées d'un point formidable.

- Calculons E et F en fonction de a et b :
  E = C + 2D = a+2b+2(a+b)= 3a+4b
  F = C+D = a+2b+a+b= 2a + 3b

- Si (a ;b) sont les coordonnées d'un point formidable alors (3a+4b ;2a+3b) est aussi un point formidable.

Ainsi si A (1 ;0) est un point formidable alors (3 ;2) puis (17 ;12) puis (99 ; 70) sont trois autres points formidables donc (17 ;–12) et (99 ;–70) aussi par « symétrie ».
(17 ;12) et (99 ; 70) constituent donc une réponse possible.
(17 ;12) et (17 ;–12) une autre réponse possible...

3°) Je donne l'algorithme de Philippe : tinyurl.com/oghoqbj
La première solution possible est le couple (3363 ;2378).