1$^{\text{ère}}$ S	Devoir n° 7 (DS)	Corrigé

La calculatrice n'était pas autorisée.

Exercice 1 : connaissance du cours (4,5 points)

1°) Soit a et b deux réels positifs tels que a < b.

Comme a et b sont positifs alors $\sqrt{b}$ et $\sqrt{a}$ sont bien définis.

Comme la fonction racine carrée est positive alors $\sqrt{b}+\sqrt{a} \geqslant 0$ et comme $a \neq b$ (puisque a < b) alors $\sqrt{b}+\sqrt{a} > 0$ donc $\sqrt{b}+\sqrt{a} \neq 0$ d'où $\sqrt{b}-\sqrt{a} = \frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})(\sqrt{b}+\sqrt{a})}{\sqrt{b}+\sqrt{a}} = \frac{b-a}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}$.

Comme $a < b$ alors $b-a > 0$ et comme $\sqrt{b}+\sqrt{a} > 0$ alors $\frac{b-a}{\sqrt{b}+\sqrt{a}} > 0$ donc $\sqrt{b}-\sqrt{a} > 0$ donc $\sqrt{b} > \sqrt{a}$ donc la fonction racine carrée conserve l'ordre donc elle est croissante sur [0 ;+∞[(et même strictement croissante).

2°) Soit f : x ↦ x+1 et g : x↦ x. Ces deux fonctions sont des fonctions du type x ↦ ax+b avec a > 0 donc elles sont strictement croissantes sur ℝ. Leur produit fg est la fonction x ↦x(x+1) donc fg est une fonction trinôme du second degré donc elle n'est pas monotone sur ℝ.

3°)

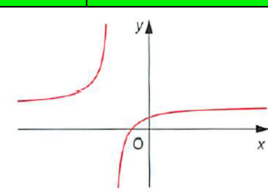
T_1 *: Si u est une fonction monotone et* ***positive*** *sur un intervalle I alors* $\boldsymbol{\sqrt{u}}$ ***et u*** *ont* ***même sens*** *de variation sur I.*

T_2 *: Si u est une fonction monotone et* ***non nulle*** *sur un intervalle I alors* $\boldsymbol{\frac{1}{u}}$ ***et u*** *ont des* ***sens contraires*** *de variation sur I.*

4°) D'après le cours, si $0 < x < 1$ alors $x^2 \leqslant x \leqslant \sqrt{x}$ or $0 < \frac{2}{3} < 1$ donc $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \leqslant \sqrt{\frac{2}{3}}$

Exercice 2 (4 points)

En rouge, les mauvaises réponses ; en vert, les bonnes réponses.

1°) La fonction f est strictement croissante sur]0 ;+∞[			
A : $f(x) = 1+\frac{4}{x}$	B : $f(x) = 3-4\sqrt{x}$	C : $f(x) = 5-x^2$	D : $f(x) = 2\lvert x\rvert - 6$
2°) Soit $f(x) = \sqrt{3-x}$ alors f est décroissante sur			
A : [0 ;+∞[	B :]–∞ ;–3]	C : [3 ;+∞[	D :]–∞ ;3]
3°) La fonction f a même sens de variation que la fonction valeur absolue sur ℝ.			
A : $f(x) = 2\lvert x\rvert - 3$	B : $f(x) = -\lvert x\rvert$	C : $f(x) = \frac{\lvert x\rvert}{3}$	D : $f(x) = \lvert x\rvert^2$
4°) La courbe ci–contre peut représenter la fonction f définie par : 			
A : $f(x) = 2+\frac{3}{x+2}$	B : $f(x) = 2-\frac{3}{x+2}$	C : $f(x) = 2+\frac{5}{x-2}$	D : $f(x) = -2+\frac{3}{1-x}$

Exercice 3 (2 points)

fonction	$f(x) = \sqrt{-x^2+x}$	$f(x) = \frac{1}{\lvert x\rvert - 5}$	$f(x) = \frac{1}{x^2+5}$	$f(x) = \frac{1}{x^2}+5$
Ensemble de définition	[0 ;1]	ℝ\{−5 ;5}	ℝ	ℝ*

Exercice 4 (2,5 points, d'après DEFIBAC)

x	$-\infty$		$x_1=-2$		$\alpha=-\frac{3}{2}$		$x_2=-1$		$+\infty$	**Argumentation**
$-x^2-3x-2$		↗		↗	$\beta=\frac{1}{4}$	↘		↘		$a=-1, b=-3, c=-2$ $\alpha=-\frac{b}{2a}=-\frac{3}{2}$ $\beta=f(\alpha)$
$-x^2-3x-2$		$-$	0		$+$		0	$-$		$\Delta=b^2-4ac=1,$ $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=-2$ $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=-1$
$\sqrt{-x^2-3x-2}$			0	↗	$\frac{1}{2}$	↘	0			Avec T_1
$\frac{1}{\sqrt{-x^2-3x-2}}$			‖	↘	2	↗	‖			Avec T_2

Exercice 5 (2 points, d'après DEFIBAC)

1°) Comme $x+2=0 \Leftrightarrow x=\ -2$ donc $\mathscr{D}=\mathbb{R}\backslash\{-2\}=]-\infty\ ;-2[\cup]-2\ ;+\infty[$

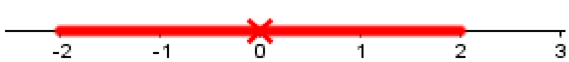
2°) $\forall$ x $\in \mathscr{D}$, on a : $2-\frac{8}{x+2}=\frac{2(x+2)}{x+2}-\frac{8}{x+2}=\frac{2x+4-8}{x+2}=\frac{2x-4}{x+2}=f(x)$ CQFD

3°)

x	$-\infty$	-2	$+\infty$	Argumentation
x+2	↗		↗	Si a > 0, la fonction x $\mapsto$ ax+b est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
x+2		0		x + 2 = 0 $\Leftrightarrow$ x = −2
$\frac{1}{x+2}$	↘	‖	↘	Avec T_2
$\frac{-8}{x+2}$	↗	‖	↗	Si k < 0, alors u et ku ont des sens de variation contraires
$2-\frac{8}{x+2}$	↗	‖	↗	Pour tout réel k, u et u+k ont même sens de variation.

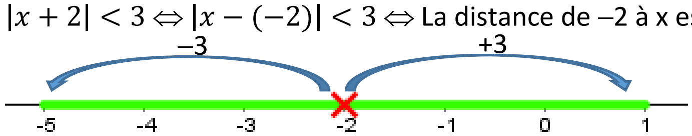
Exercice 6 (2 points)

1. $|x| \geqslant 2$ $\Leftrightarrow$ La distance de 0 à x est supérieure ou égale à 2 $\Leftrightarrow$ x $\geqslant$ 2 ou x $\leqslant$ −2.



Soit S l'ensemble solution de cette équation : S =]−∞ ;−2]∪[2 ;+∞[

2. $|x+2|<3 \Leftrightarrow |x-(-2)|<3 \Leftrightarrow$ La distance de −2 à x est strictement inférieure à 3 $\Leftrightarrow$ −5 ⩽ x ⩽ −1



Soit S l'ensemble solution de cette équation : S = [−5 ;−1].

3. x+3 ⩾ 0 ⇔ x ⩾ –3 donc : $\sqrt{x+3} < 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 < 4^2 \\ x \geqslant -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 13 \\ et \\ x \geqslant -3 \end{cases}$ ⇔ –3 ⩽ x < 13.

   L'ensemble solution de l'inéquation est l'intervalle [–3 ;13[

4. D'après le cours : $\sqrt{2x-1} = -x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x–1 = (-x)^2 \\ -x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ x \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = 0 \\ x \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ et \\ x \leqslant 0 \end{cases}$

   Les deux conditions étant incompatibles, on en déduit que l'équation est sans solution.

   <u>Autre raisonnement (analyse et synthèse)</u> :

   Si x est solution alors $\sqrt{2x-1} = -x$ donc 2x–1 =(–x)² donc 2x–1=x² donc (x–1)²= 0 donc x–1=0 donc x= 1 (donc 1 est le seul candidat comme solution de l'équation)

   Réciproquement si x = 1 alors $\sqrt{2x-1} = 1$ et –x = –1 donc 1 ne peut solution de l'équation donc l'équation proposée n'a pas de solution (« le seul candidat ne convient pas »).

Exercice 7 (1,5 points)

1°) Il suffit que les deux côtés [AC] et [AB] aient des longueurs strictement positives soit pour x > 0 et 8–x > 0.
On en déduit que x ∈]0 ;8[.
2°) Comme le triangle est rectangle en A
alors, avec le théorème de Pythagore, on a $BC^2 = \sqrt{AC^2 + AB^2} = \sqrt{x + (8-x)^2} = \sqrt{2x^2 - 16x + 64}$
donc p(x) = AB+ AC + BC = $8 - x + x + \sqrt{2x^2 - 16x + 64} = 8 + \sqrt{2x^2 - 16x + 64}$ CQFD
3°) Posons $u(x) = 2x^2 - 16x + 64$ alors $p = 8 + \sqrt{u}$ donc u et p ont les mêmes variations donc les mêmes extrémums sur les intervalles où u est positive et p défini (p est définie sur]0 ;8[comme périmètre du triangle).
Soit Δ le discriminant de u(x) alors Δ = (–16)² – 4×2×64 = 256 – 128×2×2 = 256–256×2 donc Δ<0 donc u(x) est du signe du coefficient de « x² » donc pour tout réel x, u(x) est strictement positive sur ℝ.
Son maximum sur ℝ est :

_ obtenu en "$\alpha = -\frac{b}{2a}$" $= \frac{16}{4} = 4$ »

_ est égal à $u(\alpha) = 2 \times 4^2 - 16 \times (4) + 64$ = 32–64+64 = 32.

Comme 4 appartient à]0 ;8[alors le maximum de p sur]0 ;8[est donc :

_ pour les triangles ABC avec AB = 4 = 8–4 = AC (donc les triangles rectangles isocèles en A)

Le plus petit périmètre est p(4) = 8 + $\sqrt{32}$.

Exercice 8 (1,5 points)

1°) MA + 2MB = $|x-2| + 2|x-(-3)| = |x-2| + 2|x+3|$
2°)

x	–∞		–3		2		+∞
$\lvert x-2 \rvert$		–x+2	5	–x+2	0	x–2	
$\lvert x+3 \rvert$		–x–3	0	x+3	5	x+3	
$2\lvert x+3 \rvert$		–2x–6	0	2x+6	10	2x+6	
		–3x–4	**5**	**x+8**	**10**	**3x+4**	
MA + 2MB		↘	**5**	↗	10	↗	

Pour a > 0, les fonctions x⟼ax+b sont strictement croissantes sur ℝ.

Pour a < 0, les fonctions x⟼ax+b sont strictement décroissantes sur ℝ.

donc la plus petite valeur de MA + 2MB est égale à 5 pour x = –3.

Pour indication, voici la représentation graphique de la fonction $x \mapsto$ MA +2 MB