1SB	**Devoir DT 22**	15/04/2016

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n = 5 et p = 0,25

1°) Avec votre calculatrice et les fonctions « statistiques », calculer une valeur arrondie à 10^{-2} près des nombres suivants :

$P(X = 6)$ ≈ 0 .... $P(X \leqslant 2)$ $\approx 0,90$

$P(X = 3)$ $\approx 0,09$ .... $P(X \geqslant 3)$ $= 1 - P(X < 3)$

$= 1 - P(X \leq 2)$

$\approx 0,10$

2°) Calculer d'une autre façon P(X = 3).

$P(X=3) = \binom{5}{3} 0,25^3 (1-0,25)^7 \approx 0,09$

3°) Sans calculatrice, E(X) = $n.p = 5 \times 0,25 = 1,25$ V(X) = $np(1-p) = 1,25 \times 0,75 = \frac{5}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{15}{16}$, $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{\sqrt{15}}{4}$

4°) Expliquer simplement pourquoi $P(X=0) = \left(\frac{3}{4}\right)^5$.

L'événement « X = 0 » correspond à 5 échecs successifs sur 5 essais dans des conditions d'indépendance. Sa probabilité est donc $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4}$ donc $\left(\frac{3}{4}\right)^5$

5°) Compléter : Pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Exercice 2

1°) Avec votre calculatrice : $\binom{7}{3} = 35$

2°) En déduire un autre coefficient binomial. $\binom{7}{3} = \binom{7}{7-3} = \binom{7}{4} = 35$

3°) Exprimer $\binom{7}{3}$ comme somme de deux coefficients binomiaux.

$\binom{7}{3} = \binom{6}{3} + \binom{6}{2}$

4°) Justifier sans calculs instrumentés par une calculatrice que $\binom{4}{2} = 6$

Soit 4 éléments A, B, C, D. Il y a 6 façons de choisir 2 de ces éléments :
AB, AC, AD, BC, BD, CD

5°) Compléter puis calculer : $\binom{5}{3} = \frac{5\,!}{(5-3\,!)(3\,!)} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times \cancel{2} \times \cancel{1}}{\cancel{2} \times \cancel{1} \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{5 \times 4 \times \cancel{3}}{\cancel{3} \times 2 \times 1} = 10$

Exercice 3

On lance 7 fois de suite un dé à 6 faces (dé non truqué).

Calculer la probabilité d'obtenir 5 fois un nombre supérieur à 4.

L'expérience peut être vue comme 7 fois la répétition dans des conditions d'indépendance de l'épreuve de Bernoulli « je lance un dé » associé au succès « le résultat est supérieur à 4 » de probabilité $\frac{2}{6}$ soit $\frac{1}{3}$.

Soit X la variable aléatoire qui correspond au nombre de succès sur ce schéma de Bernoulli (7 épreuves) alors on sait que X suit la loi binomiale de paramètres $n = 7$ et $p = \frac{1}{3}$.

Ici, on cherche $p(X = 5)$.

On sait alors que $p(X=5) = \binom{7}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(1-\frac{1}{3}\right)^{7-5}$

$$= 21 \times \left(\frac{1}{3}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$= \frac{21 \times 4}{3^7} = \frac{7 \times 4}{3^6} = \frac{28}{729}$$

On peut aussi obtenir une valeur approchée de $P(X=5)$ avec une calculatrice et l'instruction binompdf $(7, 1/3, 5)$

On obtient $p(X=5) \approx 0{,}04$

et on peut contrôler que $\frac{28}{729} \approx 0{,}04$.