Groupe 2 | Devoir maison 22, exercice 3 | Philippe Cadieux (R) / Joël Besser et Harouké (?)

Excellent.

10/10

1/a) On considère l'expérience aléatoire « effectuer un contrôle ». Cette expérience comporte deux issues : - un succès : Théo est contrôlé, de probabilité $p = 0,05$

- un échec : Théo n'est pas contrôlé, de probabilité $1-p = 0,95$

L'expérience aléatoire est donc une épreuve de Bernoulli. On répète cette expérience 40 fois de manière identique et indépendante les unes des autres. On définit alors un schéma de Bernoulli à 40 épreuves. Soit X la variable aléatoire qui correspond au nombre de succès. La loi de X est une loi binomiale de paramètres $n = 40$ et $p = 0,05$

Ainsi, $p(X \leq 2) = p(X=0) + p(X=1) + p(X=2)$

$$= \binom{40}{0}(0,05)^0(0,95)^{40} + \binom{40}{1}(0,05)^1(0,95)^{39} + \binom{40}{2}(0,05)^2(0,95)^{38}$$

$$p(X \leq 2) \approx 0,6767$$

Donc la probabilité que Théo soit contrôlé au plus 2 fois est de 0,6767 à 10^{-4} près. oui

b) • Lorsque Théo n'est pas contrôlé, il ne paie pas le 10 \$ que coûte son trajet et gagne donc 10 \$.

• Lorsque Théo est contrôlé, il doit payer 10 \$ pour son trajet et 100 \$ d'amende, soit un total de 110 \$.

Théo fraude pour les 40 trajets étudiés, d'où

$$Z = 40 \times 10 - 110X = 400 - 110X$$

Il s'ensuit que $E(Z) = E(400 - 110X)$

$$E(Z) = 400 - 110\,E(X) \quad \text{oui} \qquad (I)$$

Or, X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(40\,;\,0,05)$. On a donc $E(X) = 40 \times 0,05 = 2$

Ainsi, $E(Z) = 400 - 110 \times 2 = 400 - 220 = 180$ \$. oui

2) La seule donnée qui change ici est p, dont nous ne connaissons pas la valeur. X suit donc ici une loi binomiale $\mathcal{B}(40; p)$. Z est la variable aléatoire donnant le gain algébrique de Théo. Théo peut, en moyenne, espérer de l'argent en fraudant lorsque $E(Z) > 0$. D'après la relation (I),

$$E(Z) = 400 - 110\, E(X).$$

De plus, X suivant une loi binomiale, $E(X) = 40p$.

Ainsi, $E(Z) > 0 \iff 400 - 110\, E(X) > 0$

$$\iff 400 - 110 \times 40p > 0$$

$$\iff p < \frac{400}{4400}$$

$$\iff p < \frac{1}{11}$$ ok

Par conséquent, la fraude est systématiquement favorable à Théo lorsque p est inférieure à $\frac{1}{11}$.

ok